Геометрические свойства алгебраически интегрируемых квантовых вполне интегрируемых систем

А.Б.Жеглов

мехмат МГУ

Дни геометрии в Новосибирске — 2014, Новосибирск, 24 — 27 сентября 2014 года

Рассмотрим k-алгебру ($\operatorname{char} k = 0$) дифференциальных операторов от n переменных

$$D_n = k[[x_1, \ldots, x_n]][\partial_1, \ldots, \partial_n]$$

Как описать (классифицировать) все коммутативные k-подалгебры в D_n?
Это очень трудная задача, и в общем виде она не решена до сих пор. В настоящее время представляет большой интерес даже нахождение новых нетривиальных примеров таких алгебр, поскольку они, как правило, позволяют найти новые решения известных нелинейных уравнений мат. физики.

Наиболее полный ответ есть для $n = 1$. В этом случае классификация выглядит так:

Будем классифицировать только алгебры $B \subset D_1$, содержащие оператор со старшим коэффициентом 1:

B— эллиптическая $\Longleftrightarrow \exists P \in B, P = \partial^n + p_{n-1}(x)\partial^{n-1} + \ldots + p_0(x)$

$$B_1 \sim B_2 \Longleftrightarrow \exists f \in k[[x]]^*, B_1 = f^{-1}B_2 f$$

$$rk(B) := GCD\{ord(Q) | Q \in B\}$$

Теорема

Имеется взаимно-однозначное соответствие

$$[B \quad \text{ранга } r]/\sim \longleftrightarrow [(C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi) \quad \text{ранга } r]/\simeq$$

где $(C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi)$ — геометрические данные ранга r, т.е.

- C — неприводимая проективная кривая над k;
- $P \in C$ — регулярная точка;
- $$\pi : \widehat{\mathcal{O}}_P \longrightarrow k[[u]]$$
  локальный изоморфизм локальных колец (u — локальный параметр в т. P).
- $\mathcal{F}$ — пучок без кручения ранга r с дополнительными условиями
  $$H^0(C, \mathcal{F}) = 0, \quad H^1(C, \mathcal{F}) = 0.$$
  (Если C — неособая кривая рода g, то $\mathcal{F}$ локально свободен ранга r и степени $1 + r(g-1)$)
- $\phi : \widehat{\mathcal{F}}_P \simeq k[[u]]^{\oplus r}$ — изоморфизм $\widehat{\mathcal{O}}_P$-модулей (тривиализация $\mathcal{F}$ в точке P)

Пример

Вот один из примеров. Если взять рациональную кривую $y^2 = x^3$, и одно из расслоений ранга 1 на ней, то получатся операторы

$$P = \partial^2 - 2\frac{1}{(1-x)^2}, \quad Q = \partial^3 - 3\frac{1}{(1-x)^2}\partial - 3\frac{1}{(1-x)^3}$$

В случае $n = 2$ оказывается проще классифицировать подалгебры в пополненной алгебре дифференциальных операторов:

Определим

$$\hat{D}_2 = \hat{D}_1[\partial_2] \supset D_2 = k[[x_1, x_2]][\partial_1, \partial_2],$$

где

$$\hat{D}_1 = \{a = \sum_{q \geq 0} a_q \partial_1^q \quad | a_q \in k[[x_1, x_2]] \\ \text{и } \forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ т. что} \\ \mathrm{ord}_M(a_m) > N\ \forall\, m \geq n\} \quad (1)$$

(здесь $\mathrm{ord}_M(a_m) = \max\{j : a_m \in (x_1, x_2)^j\}$).

В алгебре D_2 есть 2 функции порядка: обычная (ord) и лексикографическая (ord_Γ). Будем считать, что элемент $P \in \hat{D}_2$ имеет лексикографический порядок $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (l, m)$, если

$$P = p\partial_2^m + \text{члены меньшего порядка по } \partial_2,$$

и $\mathrm{ord}(p) = l$.

$$B \subset \hat{D}_2 \text{— квазиэллиптическая} \iff \exists P, Q \in B$$

$$\text{с } \mathrm{ord}_\Gamma(P) = (0, k) \text{ и } \mathrm{ord}_\Gamma(Q) = (1, l)$$

$$B_1 \sim B_2 \iff \exists f \in \hat{D}_1^*, B_1 = f^{-1}B_2 f$$

$$\mathrm{rk}(B) = \mathrm{GCD}\{q(a), \quad \text{где } a \in B \text{ т. что } \mathrm{ord}_\Gamma(a) = (0, q(a))\}.$$

Замечание

Наше определение ранга отличается от обычного определения ранга, пригодного в случае когда кольцо B — кольцо обычных операторов в частных производных.
Известно, что наш ранг всегда меньше или равен обычному рангу.
Напомним, что обычный ранг равен рангу пучка собственных функций дифференциальных операторов из B:

$$Q(f) = \lambda f, \quad Q \in B$$

Это определение имеет следующую интерпретацию (Браверманом, Этингофом, Гайтсгори, 1998):

Рассмотрим пару (Λ, θ), где Λ — неприводимое n-мерное аффинное алгебраическое многообразие,

$$\theta : \mathcal{O}_\Lambda \to \mathrm{D}(\mathrm{X})$$

— вложение алгебр ($\mathrm{D}(\mathrm{X})$ — алгебра диф. операторов на алг. многообразии X). Такую пару называют квантовой вполне интегрируемой системой (здесь алгебра $\mathrm{D}(\mathrm{X})$ — квантовый аналог пуассоновой алгебры $\mathcal{O}(\mathrm{T}^*\mathrm{X})$).
Рангом такой системы называют размерность решений системы

$$\theta(\mathrm{g})\psi = \mathrm{g}(\lambda)\psi, \quad \mathrm{g} \in \mathcal{O}_\Lambda$$

в общей точке $\lambda \in \Lambda$.
В случае, когда такой (обычный) ранг равен 1, соотв. коммутативные кольца в $\mathrm{D}(\mathrm{X})$ называются алгебраически интегрируемыми квантовыми вполне интегрируемыми системами.

Определение

Набор данных $(X, C, P, \mathcal{F}, \pi, \phi)$ — геометрические данные ранга r, если они состоят из:

- X — проективная неприводимая поверхность над полем k;
- C — неприводимый приведенный обильный Q-Картье дивизор на X;
- $P \in C$ — регулярная на C и на X точка;
- $$\pi : \widehat{\mathcal{O}}_P \longrightarrow k[[u, t]]$$

  — локальный гомоморфизм локальных колец (с некоторыми спец. техническими свойствами)
- $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок без кручения на X

Определение

- $\phi : \widehat{\mathcal{F}}_{\mathrm{P}} \hookrightarrow \mathrm{k}[[\mathrm{u}, \mathrm{t}]]$ — гомоморфизм $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{P}}$-модулей, такой что композиция естественных отображений

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{F}(\mathrm{nC}')) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{F}}_{\mathrm{P}} \overset{\phi}{\hookrightarrow} \mathrm{k}[[\mathrm{u}, \mathrm{t}]] \to \mathrm{k}[[\mathrm{u}, \mathrm{t}]]/(\mathrm{u}, \mathrm{t})^{\mathrm{ndr}+1},$$

где $\mathrm{C}' = \mathrm{dC}$ — очень обильный дивизор Картье, — изоморфизмы $\forall\ \mathrm{n} \geq 0$.

Теорема

Имеется взаимно-однозначное соответствие

$$[\mathrm{B} \subset \hat{\mathrm{D}}_2 \quad \text{ранга r}]/\sim \longleftrightarrow [(\mathrm{X}, \mathrm{C}, \mathrm{P}, \mathcal{F}, \pi, \phi) \quad \text{ранга r}]/\simeq$$

где B — коммутативная квазиэллиптическая конечно порожденная подалгебра.

Какие геометрические данные описывают коммутативные подалгебры в D_2? Часто ищут подалгебры с дополнительными условиями:

B содержит операторы P, Q с постоянными символами т.ч. пересечение характеристических дивизоров операторов P, Q пусто.

Нам удалось найти несколько необходимых условий:

- Поверхность X — Коэно-Маколеева
- Пучок $\mathcal{F}$ — когерентный ранга r и тоже коэно-маколеев;
- Дивизор C — рациональная кривая, $C^2 = 1/r$.
- Если $\pi : \mathbb{P}^1 \to C$ — отображение нормализации, то $\mathcal{F}|_C = \pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$ если $\mathrm{rk}(\mathcal{F}) = 1$.

Гипотеза

Эти необходимые условия являются достаточными если $\mathrm{rk}(\mathcal{F}) = 1$.

Замечание

Комм. кольца обыкновенных дифф. операторов ранга 1 с точностью до линейных замен переменных определяются лишь геометрическими объектами, т.е. кривой C, точкой P и пучком $\mathcal{F}$.
Аналогично, комм. кольца в $\hat{\mathrm{D}}_2$ с точностью до (допустимых) линейных замен переменных определяются лишь геометрическими объектами, т.е. поверхностью X, кривой C, точкой P и пучком $\mathcal{F}$.

Более того, можно определить морфизм ограничения

$$\zeta : \mathcal{M}_{\mathrm{X}}(\chi) \to \mathcal{M}_{\mathrm{C}}(\mathrm{g}),$$

где $\mathcal{M}_{\mathrm{X}}(\chi)$ — пространство модулей пучков без кручения ранга 1 на поверхности X с фиксированным полиномом Гильберта

$$\chi(\mathrm{n}) = \frac{(\mathrm{nd}+1)(\mathrm{nd}+2)}{2},$$

а $\mathcal{M}_{\mathrm{C}}(\mathrm{g})$ — пространство модулей пучков без кручения ранга 1 степени $\mathrm{g} = \mathrm{p_a}(\mathrm{C})$ на кривой C.

Гипотеза

Морфизм ζ сюръективен.

Как найти все поверхности, удовлетворяющие перечисленным свойствам хотя бы для случая $r = 1$ — пока нерешенная проблема. Также пока известно не очень много примеров колец дифференциальных операторов ранга 1.

Теорема

Пусть $B \subset \hat{D}$ — коэно-маколеево конечно порожденное квази-эллиптическое кольцо коммутирующих операторов. Тогда B содержит ∂_1 если и только если дивизор C — Картье, пучок $\mathcal{F}$ — когерентный ранга 1, $\mathcal{O}_C(C) \simeq \mathcal{O}_C(P)$, и отображение

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X(C))$$

инъективно.
Более того, пучок $\mathcal{F}$ — Коэно-Маколеев.

Примеры

В большинстве нетривиальных примеров поверхность X рациональна. Один из методов построения таких примеров был предложен Ю.Берестом и А.Касманом в 1998 г.
Для построения они использовали преобразование Дарбу, стартуя с некоторых подалгебр операторов с постоянными коэффициентами. Все эти кольца обладают следующим свойством:
их нормализации совпадают с кольцом операторов с постоянными коэффициентами $k[\partial_1, \ldots, \partial_n]$. Один из наших смежных результатов утверждает обратное:

Теорема

Пусть $B \subset D$ — коммутативная подалгебра ранга 1. Предположим, что нормализация $\mathrm{Spec}(B)$ — это $\mathbb{A}^2$. Тогда существует оператор $F \in B$, такой что $F^{-1}BF \subset k[\partial_1, \partial_2]$.

Еще один смежный результат описывает некоторое пополнение аффинной плоскости, используя при этом ранее развитую нами теорию риббонов, и не используя известные результаты Морроу, Кожимы и Такахаши:

Теорема

Пусть X — проективная поверхность, $C \subset X$ — целый дивизор Вейля, не содержащийся в особом локусе X, являющийся также обильным $\mathbb{Q}$-Картье дивизором, и пусть $C^2 = 1$. Предположим, что $X \backslash C \simeq \mathbb{A}^2$. Тогда $X \simeq \mathbb{P}^2$, $C \simeq \mathbb{P}^1$.

Пример (Чалых, Фейгин, Веселов)

Квантовая система Калоджеро-Мозера — максимальная подалгебра операторов, коммутирующих с оператором Калоджеро-Мозера:

$$\partial_1^2 + \partial_2^2 - \sum_{\mathrm{i}=1,\ldots \mathrm{n}} \frac{2}{(\cos(2\pi \mathrm{i}/\mathrm{n})\mathrm{x}_2 - \sin(2\pi \mathrm{i}/\mathrm{n})\mathrm{x}_1)^2},$$

изоморфная подалгебре квазиинвариантов в кольце многочленов $\mathrm{k}[\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2]$, т.е. подалгебре многочленов $\mathrm{f} \in \mathrm{k}[\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2]$, удовлетворяющих условию

$$\partial_{(\cos(2\pi \mathrm{i}/\mathrm{n})\mathrm{u}_2 - \sin(2\pi \mathrm{i}/\mathrm{n})\mathrm{u}_1)}(\mathrm{f}) = 0.$$

Это подалгебра ранга 1 в D_2. Соответствующая ей поверхность X рациональна, ее нормализация — это $\mathbb{P}^2$, и особый локус — образ n прямых при отображении нормализации.

Теорема (-,Burban)

Квантовая система Калоджеро-Мозера с точностью до замены переменных задается своей спектральной поверхностью X.

Пример

Пусть X — замыкание аффинной поверхности $\mathrm{Spec}\,A$, где $A = (k[h][z,x]/(z^2 - x(x+3h^2)^2)$, во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(x,z,h,T)$, где веса координат (x,z,h,T) равны $(2,3,1,1)$. В этом случае можно перечислить все возможные пучки без кручения ранга 1 и найти тем самым все возможные коммутативные подалгебры в $\hat{D}_2$, изоморфные A. Все они будут содержать операторы

$$\partial_1 \quad \text{и } \partial_2^2 + \frac{24\partial_1^2\lambda}{(\lambda \exp{(ix_2\sqrt{3}\partial_1)} + \exp{(-ix_2\sqrt{3}\partial_1)})^2},$$

где $\lambda = \frac{a+b\partial_1}{c+d\partial_1}$, $a,b,c,d \in k$.
В частности, для такой поверхности нет нетривиальных коммутативных подалгебр в D_2.

Пример

Пусть X — замыкание аффинной поверхности $\mathrm{Spec}(k[t^{-2}, t^{-3}, ut^{-2}])$, а $\mathcal{F}$ — продолжение пучка, заданного модулем

$$W = \langle 1+t, t^{-i}u^j, i \geq 1, 0 \leq j \leq i \rangle$$

Тогда соответствующая алгебра операторов (ранга 1) порождается операторами

$$P = \partial_2^2 - 2\frac{1}{(1-x_2)^2} e^{-x_1 \star \partial_1},$$

$$Q = \partial_1 \partial_2 + \frac{1}{1-x_2} e^{-x_1 \star \partial_1} \partial_1,$$

$$P' = \partial_2^3 - 3\frac{1}{(1-x_2)^2} e^{-x_1 \star \partial_1} \partial_2 - 3\frac{1}{(1-x_2)^3} e^{-x_1 \star \partial_1}.$$

где $e^{-x_1 \star \partial_1} = 1 - x_1 \partial_1 + x_1^2 \partial_1^2 / 2! - x_1^3 \partial_1^3 / 3! + \dots$.