

Цепочки Богоявленногого и обобщённые числа Каталана

В.Э. Адлер

ИТФ им. Л.Д. Ландау

Семинар сектора матфизики · Черногоровка, 27 октября 2021

- Постановка задачи
 - ▶ цепочки Богоявленского VL_r
 - ▶ распад стационарного решения при обрыве цепочки ($r = 1$, цепочка Вольтерры: [Кулаев, Шабат 2019](#))
 - ▶ вычислительные эксперименты
- Числа из начальных условий, решения из чисел
 - ▶ решения в виде рядов Тейлора
 - ▶ обобщённые числа Каталана
 - ▶ экспоненциальные производящие функции
 - ▶ другие примеры
- Детерминантные формулы
 - ▶ для цепочек
 - ▶ для чисел
 - ▶ решение задачи для единичной ступеньки ($r = 1$: [Адлер, Шабат 2018](#))
- Симметричные редукции
 - ▶ случай $r = 1$ ([Адлер, Шабат 2019](#))
 - ▶ сложности при $r = 2$

Постановка задачи

Цепочки Богоявленского

Цепочка Богоявленского порядка r , $r \in \mathbb{N}$, имеет вид

$$u'_j = u_j(u_{j+r} + \dots + u_{j+1} - u_{j-1} - \dots - u_{j-r}), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (\text{BL}_r)$$

где $u_j = u_j(t) \in \mathbb{R}$, $u' = du/dt$.

- $r = 1$ (цепочка Вольтерры): Манаков 1974, Кас & van Moerbeke 1975
- $r > 1$: Narita 1982, Itoh 1987, Богоявленский 1988, 1991

Экологическая интерпретация — модель «хищники–жертвы»

Переменная u_j — численность вида j в подходящих единицах.

Вид j питается видами $j + 1, \dots, j + r$ и, соответственно, служит пищей для видов $j - r, \dots, j - 1$.

Цепочки с $r > 1$ иногда называют «голодными цепочками Вольтерры».

Стационарные решения

Положения равновесия определяются линейным разностным уравнением

$$u_{j+r} + \dots + u_{j+1} - u_{j-1} - \dots - u_{j-r} = 0.$$

Характеристический многочлен равен

$$q^{2r} + \dots + q^{r+1} - q^{r-1} - \dots - 1 = (q^{r+1} - 1)(q^r - 1)/(q - 1).$$

Общее стационарное решение есть сумма двух произвольных постоянных периодических последовательностей $a_j = a_{j+r}$ и $b_j = b_{j+r+1}$:

$$u = (a_1, \dots, a_r) + (b_1, \dots, b_{r+1}) \stackrel{\text{def}}{\iff} u_j = a_{j \bmod r} + b_{j \bmod (r+1)}.$$

Это последовательность с периодом $r(r+1)$, но не общего вида. Всего имеется $2r$ параметров, а с учетом скейлинга $2r - 1$.

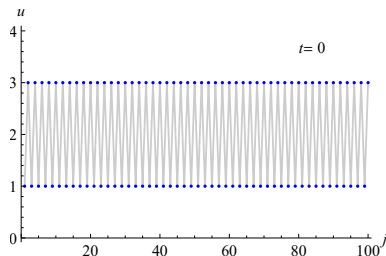
- Вычислительные эксперименты показывают, что если все $u_j > 0$, то такое решение устойчиво относительно малых возмущений, не обязательно периодических.

Обрыв цепочки

Возьмем в качестве начального условия положительное стационарное решение при $j > 0$, а при $j \leq 0$ положим

$$\dots = u_{-2}(t) = u_{-1}(t) = u_0(t) = 0.$$

Это ограничивает цепочку на полупрямую, но равновесие теряется. Как будет эволюционировать, например, такое начальное условие?



$$r = 1$$

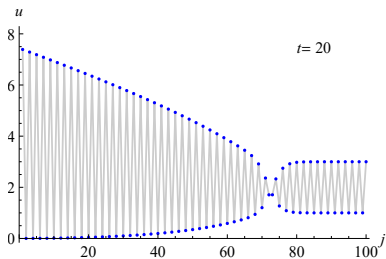
$$u = (1) + (0, 2)$$

(то есть, $u_{\text{odd}} = 1$, $u_{\text{even}} = 3$)

- Мы будем рассматривать обрывы для точных стационарных решений. Малые возмущения не меняют общее поведение.

Поведение решения при $t > 0$

У u_1 враги исчезли, а пища осталась. Ясно, что u_1 будет быстро расти и пожирать u_2 , в результате u_3 начнёт расти, и так далее, по принципу домино.



При $t = 20$ старое положение равновесия разрушается около $j = 70$

- u_{odd} будут жить голодно, но в безопасности, и стабилизируются на уровне выше исходного
- u_{even} будут жить сыто, но в страхе, и вымрут

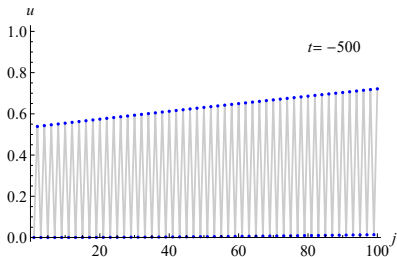
Возникает задача: определить новый уровень u_{odd} и скорость процесса.

Поведение решения при $t < 0$

Отметим, что в цепочке имеются симметрии

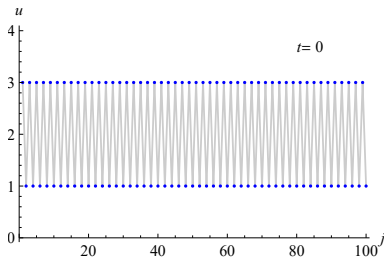
$$(u, j, t) \leftrightarrow (u, -j, -t) \leftrightarrow (-u, j, -t).$$

С учётом первой из них, обрыв слева при $t < 0$ эквивалентен обрыву справа при $t > 0$, что означает исчезновение пищи (вместо врагов). Пойдёт вымирание (этот процесс идет медленнее, чем при $t > 0$).



- u_{odd} ВЫМИРАЮТ
- u_{even} стабилизируются на уровне ниже исходного

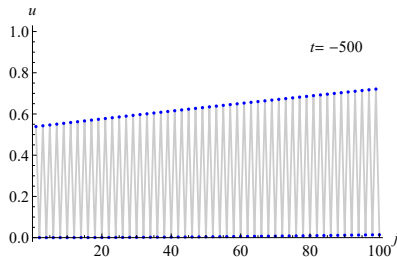
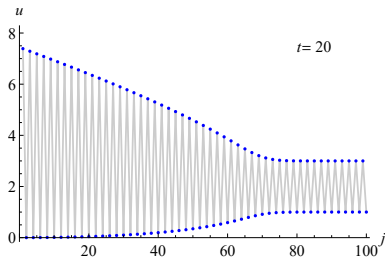
Что будет, если поменять уровни местами?



$$r = 1$$

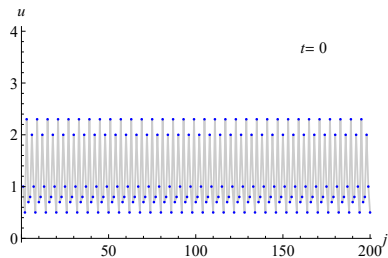
$$u = (1) + (2, 0)$$

(то есть, $u_{\text{odd}} = 3$, $u_{\text{even}} = 1$)

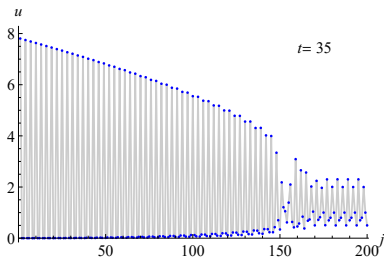
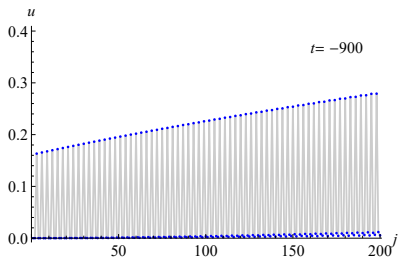


Кое-что изменилось, в частности, u_{even} теперь вымирают и при $t > 0$, и при $t < 0$. Но предельные значения те же, что и раньше.

Пример для $r = 2$

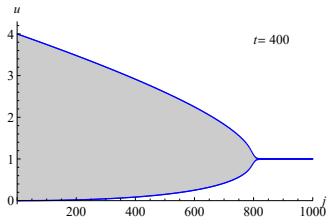


$$u = (1, 0.7) + (0, -0.2, 1.3)$$

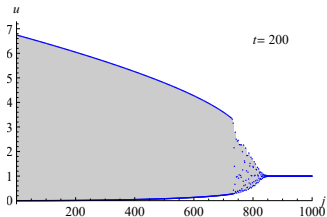


Единичная ступенька: $u_j(0) = 1, j > 0$

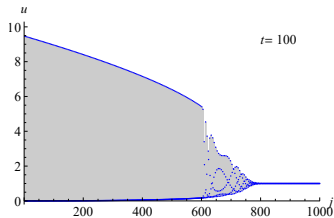
Разноуровневые начальные условия усложняют процесс, но его суть видна уже на этом основном примере. Под графиками написаны приближенные предельные значения для $u_{1+j(r+1)}$ при $t \rightarrow +\infty$.



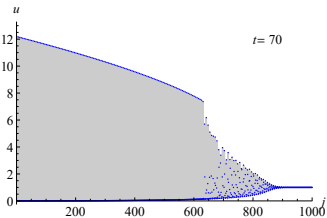
$$r = 1, u_1 \rightarrow 4$$



$$r = 2, u_1 \rightarrow 6.75$$



$$r = 3, u_1 \rightarrow 9.5$$



$$r = 4, u_1 \rightarrow 12.2$$

Постановка задачи

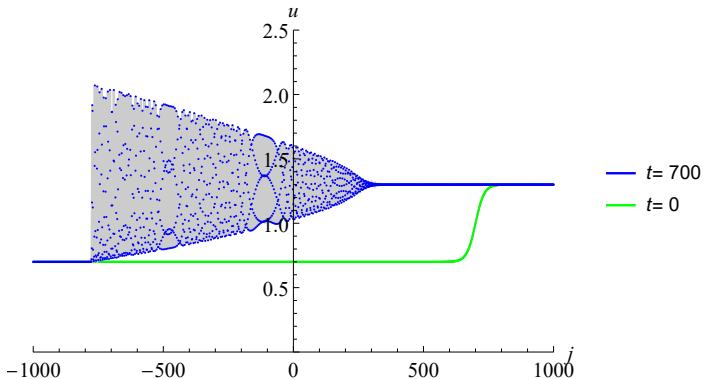
Для цепочки VL_r заданы начальные условия при $t = 0$

$$u_j = 0, \quad j \leq 0, \quad u = (a_1, \dots, a_r) + (b_1, \dots, b_{r+1}) > 0, \quad j > 0. \quad (1)$$

Найти предельные значения u_j при $t \rightarrow \pm\infty$ и описать переходную зону.

- Концептуально, это напоминает задачу Гуревича–Питаевского о ступеньке для КдФ, вблизи заднего края волны сжатия. Наша задача проще, благодаря обрыву на полупрямую.
- Можно поставить задачу и на всей прямой $j \in \mathbb{Z}$, с начальным условием, равным одному стационарному решению при $j \leq 0$ и другому при $j > 0$. Этот случай сложнее и требует привлечения конечнозонной теории ($r = 1$: [Верещагин 1997](#)).

- Повидимому, известный непрерывный предел от Вольтерры к КдФ (или его усложнение с разбивкой номеров по какому-то модулю) в этих задачах плохо работает.



Распад плавной ступеньки на прямой ($r = 1$)

Результаты

- Мы покажем, что в случае единичной ступеньки

$$u_j(0) = 0, \quad j \leq 0, \quad u_j(0) = 1, \quad j > 0 \quad (2)$$

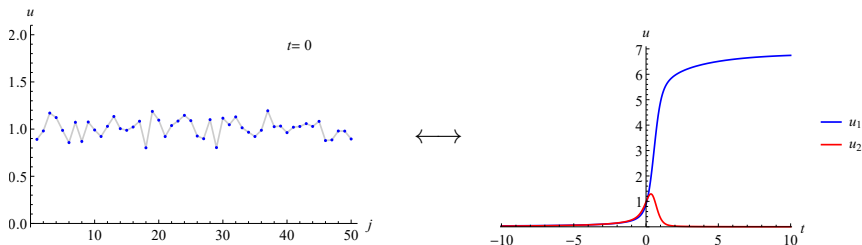
задача Коши является точно-решаемой, в том смысле, что функции $u_1(t), \dots, u_r(t)$ определяются точно.

- Именно, эти функции — рациональные выражения от обобщённых гипергеометрических функций типа ${}_rF_r$ (со специальными параметрами), служащих экспоненциальными производящими функциями для обобщённых чисел Каталана.
- Отсюда можно найти асимптотику для $u_1(t), \dots, u_r(t)$ и далее распространить её на все $j > 0$ (это дело техники и в докладе пропущено).
- Для более общих разноуровневых начальных данных (1) результаты не окончательные. Вероятно, и в этом случае задача точно-решаема.

Пояснение: почему достаточно искать только $u_1(t), \dots, u_r(t)$?

Общее решение цепочки с обрывом $u_j = 0, j \leq 0$, определяется по этим функциям, так как u_j с $j > r$ рекуррентно находятся из уравнений цепочки (хотя, конечно, явные формулы усложняются с ростом j).

Имеется (почти взаимно-однозначное) отображение из дискретных начальных данных при $t = 0$ в непрерывные начальные функции при $j = 1, \dots, r$. Пример для $r = 2$:



Вообще говоря, мы не умеем эффективно вычислять это отображение, но иногда, для некоторых конкретных начальных данных, $u_1(t), \dots, u_r(t)$ удаётся найти точно. В таких случаях задача Коши считается точно-решаемой.

Вопрос

Ну, и откуда берутся эти точные формулы для решения?

Числа из начальных условий,
решения из чисел

Ряды Тейлора

Наводящие соображения даёт ещё один эксперимент. Будем строить решение в виде ряда

$$u_j(t) = u_j(0) + u'_j(0)t + u''_j(0)\frac{t^2}{2} + \dots + u_j^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!} + \dots$$

Производная $u_j^{(n)}(t)$ вычисляется в силу цепочки как некоторый многочлен от $u_{j-rn}, \dots, u_{j+rn}$, после чего остаётся подставить $t = 0$. Это не очень эффективно, но около 10 коэффициентов для конкретных числовых начальных данных найти несложно.

«Волшебные» начальные данные, приводящие к чему-то известному, это единичная ступенька

$$u_j(0) = 0, \quad j \leq 0, \quad u_j(0) = 1, \quad j > 0.$$

При $r = 1$ (цепочка Вольтерры) им отвечают такие $u_1^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, \dots$:

$$1, 1, 1, 0, -4, -10, 15, 210, 504, -3528, -34440, \dots$$

Это последовательность [A302197](#) — логарифм Гурвица чисел Каталана, что в переводе с комбинаторного означает, что

$$u_1(t) = (\log f(t))',$$

где $f(t)$ — экспоненциальная производящая функция (EGF) для самих чисел Каталана c_n (1, 1, 2, 5, 14, 42, ...). Она известна:

$$f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + c_n \frac{t^n}{n!} + \cdots = {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, 2, 4t\right).$$

Если производные u_1 действительно совпадают с [A302197](#), то эти две формулы дают решение нашей задачи (при $r = 1$ и единичных начальных условиях).

Повторим вычисления при $r = 2$. Увы, последовательность для $u_1^{(n)}(0)$

$$1, 2, 5, 10, -8, -255, -1587, -1862, 76944, \dots$$

отсутствует в OEIS...

Однако, сдаваться рано. Оказывается, что известные комбинаторные последовательности возникают не для самих u_j , а для тау-функций цепочки.

Билинейное уравнение

BL_r можно записать в виде ($T : j \mapsto j + 1$ — оператор сдвига)

$$(\log u_j)' = P(u_j), \quad P = (T^{r+1} - 1)(1 - T^{-r})(T - 1)^{-1}.$$

Подстановка

$$\log u_j = (T^{r+1} - 1)(1 - T^{-r})(\log w_{j-1}), \quad (T - 1)(\log w_{j-1})' = u_j,$$

даёт билинейную цепочку

$$w_{j-1}w_j' - w_{j-1}'w_j = w_{j-r-1}w_{j+r}. \quad (3)$$

С учётом калибровочного произвола

$$w_j = C(t)c_j\tilde{w}_j, \quad c_{j-r-1}c_{j+r} = c_{j-1}c_j, \quad C(t) \neq 0, \quad c_j \neq 0,$$

обрыв на полупрямую в переменных w_j принимает вид

$$\begin{aligned} w_{-2r}(t) &= \cdots = w_{-r-1}(t) = 0, \\ w_{-r}(t) &= \cdots = w_0(t) = 1, \quad w_1(0) = \cdots = w_r(0) = 1. \end{aligned}$$

Отметим, что замену можно сделать в несколько приемов:

$$u'_j = u_j(u_{j+r} + \cdots + u_{j+1} - u_{j-1} - \cdots - u_{j-r})$$

$$\uparrow \quad u_j = v_{j+r} \cdots v_j = \frac{y_{j+r} \cdots y_{j+1}}{y_{j-1} \cdots y_{j-r}} = \frac{w_{j-r-1} w_{j+r}}{w_{j-1} w_j}$$

$$v'_j = v_j^2(v_{j+r} \cdots v_{j+1} - v_{j-1} \cdots v_{j-r}) \quad (\text{mBL}_r)$$

$$\uparrow \quad v_j = \frac{y_j}{y_{j-r}} = \frac{w_{j-r-1} w_j}{w_{j-r} w_{j-1}}$$

$$y'_j = \frac{y_{j+r} \cdots y_j}{y_{j-1} \cdots y_{j-r}}$$

$$\uparrow \quad y_j = w_j / w_{j-1}$$

$$w_{j-1} w'_j - w'_{j-1} w_j = w_{j-r-1} w_{j+r}$$

- «Правильные» переменные — w_j .
- Решение цепочки определяется функциями w_1, \dots, w_r .
- Для вычисления рядов Тейлора удобны промежуточные переменные v_j из $m\text{BL}_r$. Для них начально-краевые условия имеют вид

$$v_0(t) = 0, \quad v_1(0) = \dots = v_r(0) = 1, \quad v_{r+1}(0) = u_1(0),$$

$$v_{r+j+1}(0) = v_j(0) \frac{u_{j+1}(0)}{u_j(0)}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

а w_1, \dots, w_r определяются по v_j так:

$$w_1 = v_1, \quad w_2 = v_2 v_1, \quad \dots, \quad w_r = v_r \cdots v_1$$

(далее формулы меняются, например $w_{r+1} = v_{r+1} \cdots v_2 v_1^2 = w_1'$).

- Вернуться к переменным u_j можно по формулам

$$u_1 = \frac{w_1'}{w_1}, \quad u_2 = \frac{w_2'}{w_2} - \frac{w_1'}{w_1}, \quad \dots \quad u_j = \frac{w_j'}{w_j} - \frac{w_{j-1}'}{w_{j-1}} = \frac{w_{j-r-1} w_{j+r}}{w_{j-1} w_j}, \quad \dots$$

Обобщённые числа Каталана

Экспериментальный факт

$$w_j^{(n)}(0) = C_{j,n}^r \quad \text{при } r = 1, 2, \dots, \quad j = \overline{1, r+1}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

где

$$C_{j,n}^r = \frac{j}{rn+j} \binom{(r+1)n+j-1}{n} = \frac{j}{(r+1)n+j} \binom{(r+1)n+j}{n}.$$

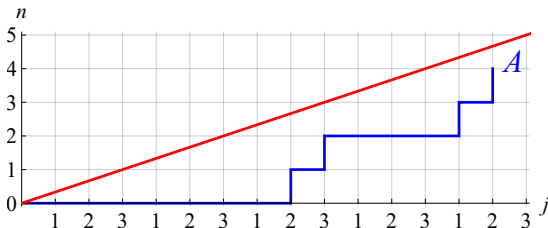
r	$j \setminus n$	0	1	2	3	4	5	6	7	...	OEIS
1	1	1	1	2	5	14	42	132	429	...	A000108
	2	1	1	3	12	55	273	1428	7752	...	A001764
2	1	1	1	3	12	55	273	1428	7752	...	A001764
	2	1	2	7	30	143	728	3876	21318	...	A006013
3	1	1	1	4	22	140	969	7084	53820	...	A002293
	2	1	2	9	52	340	2394	17710	135720	...	A069271
	3	1	3	15	91	612	4389	32890	254475	...	A006632
4	1	1	1	5	35	285	2530	23751	231880	...	A002294

...

- у переменных u , v и w следовало бы тоже писать значок r , но это неудобно. При работе с цепочками мы считаем r фиксированным числом («глобальная переменная»).
- стандартного обозначения для $C_{j,n}^r$ нет. Кроме того, во многих работах вместо параметра r используют $r' = r + 1$.
- первая строчка, $r = j = 1$: числа Каталана ([Catalan 1838](#))
- строчки $j = 1$ при $r > 1$: числа Пфаффа–Фусса–Каталана или последовательности Реньи ([Fuss 1791](#), [Graham, Knuth & Patashnik 1990](#))
- вся таблица: [Hilton & Pedersen 1991](#)
- числа определены при всех j , но обычно рассматривают только j от 1 до r или до $r + 1$. Дальше будет примерно понятно, почему.

Одна из многих комбинаторных интерпретаций:

$C_{j,n}^r$ равно числу путей из точки $(0, 0)$ в точку $(rn + j, n)$, лежащих строго ниже прямой $j = rn$, если разрешено двигаться только на единицу вправо или вверх.



В точку $A = (3 \cdot 4 + 2, 4)$ ведёт $C_{2,4}^3 = 340$ путей

Приложения:

- Статфизика, теория случайных матриц. Ансамбль из $n \times n$ матриц G , элементы которых — независимые комплексные случайные числа с гауссовским распределением $N(0, 1/n)$, имеет, при $n \rightarrow \infty$, равномерное распределение спектра по единичному кругу (Ginibre 1965). Для матриц GG^\dagger спектр положителен и при $n \rightarrow \infty$ описывается распределением Марченко–Пастура (1967). Его моменты — числа Каталана. Для произведения $G_1 \cdots G_r (G_1 \cdots G_r)^\dagger$ возникает распределение, моменты которого равны числам Фусса–Каталана (Penson & Życzkowski 2011).
- В работах Kodama & Pierce 2009, Takasaki 2018 числа Гурвица связываются с бездисперсионной цепочкой Тоды.
- Числа Каталана и многочлены Чебышева:
Артисевич, Бычков, А.Б. Шабат 2020, Бычков, Г.Б. Шабат 2021.

Напомним определение обобщенного гипергеометрического ряда:

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!},$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1)$ (восходящий факториал). При $p < q + 1$ такой ряд сходится при всех $z \in \mathbb{C}$. У нас $p = q = r$.

Утверждение 1. EGF для обобщённых чисел Каталана

При данном r и $j = \overline{1, r+1}$, EGF последовательности $C_{j,n}^r$ равна

$$\begin{aligned} f_j(t) &= C_{j,0}^r + C_{j,1}^r t + C_{j,2}^r \frac{t^2}{2!} + \cdots + C_{j,n}^r \frac{t^n}{n!} + \cdots \\ &= {}_rF_r \left(\frac{j}{r+1}, \dots, \widehat{1}, \dots, \frac{j+r}{r+1}; \frac{j+1}{r}, \dots, \frac{j+r}{r}; \frac{(r+1)^{r+1}}{r^r} t \right), \end{aligned}$$

где $\widehat{1}$ обозначает исключённое значение в первой группе параметров (то есть, числители дробей изменяются от j до $j+r$ с пропуском $r+1$).

Доказательство очень простое. По определению, гипергеометрический ряд характеризуется тем, что его первый член равен 1, а отношение коэффициентов при z^{n+1} и z^n равно

$$\frac{(a_1 + n) \cdots (a_p + n)}{(b_1 + n) \cdots (b_q + n)(n + 1)}.$$

Первый член в ряде f_j равен 1. Отношение коэффициентов при t^{n+1} и t^n , согласно формуле для $C_{j,n}^r$, равно

$$\begin{aligned} \frac{C_{j,n+1}^r}{C_{j,n}^r(n+1)} &= \frac{((r+1)n+j) \cdots ((r+1)n+j+r)}{(rn+j+1) \cdots (rn+j+r)(n+1)^2} \\ &= \frac{\left(\frac{j}{r+1} + n\right) \cdots \left(\frac{j+r}{r+1} + n\right)}{\left(\frac{j+1}{r} + n\right) \cdots \left(\frac{j+r}{r} + n\right)(n+1)^2} \cdot \frac{(r+1)^{r+1}}{r^r}. \end{aligned}$$

В числителе одна из скобок сокращается с $(n+1)$ и мы приходим к указанному гипергеометрическому ряду от масштабированной переменной $z = (r+1)^{r+1}/r^r t$. ■

- Наш экспериментальный факт подсказывает, что

$$w_j = f_j \quad \text{при} \quad j = \overline{1, r},$$

что и даёт решение в задаче о единичной ступеньке. Но, пока что мы этот факт не доказали!

- При $j = r + 1$ имеем

$$C_{r+1, n}^r = C_{1, n+1}^r, \quad f_{r+1} = f_1', \quad w_{r+1} = w_r',$$

то есть, значение $j = r + 1$ не даёт дополнительной информации.

- При $j > r + 1$ все три функции — EGF для $C_{j, n}^r$, f_j и w_j попарно различны.

Ещё один пример: числа Нараяны

Можно предположить, что обрыв более общих стационарных решений приводит к функциям ${}_rF_r(a, b; ct)$ с более общими параметрами a, b . Это оказывается не так и точный ответ в этой задаче до сих пор не найден.

Рассмотрим простейший случай $r = 1$ с мигающими начальными условиями

$$u_1 = u_3 = u_5 = \dots = 1, \quad u_2 = u_4 = u_6 = \dots = q > 0.$$

Для переменных v_j (напомним, что $u_j = v_{j+1}v_j$) начальные данные равны

$$1, 1, q, q^{-1}, q^2, q^{-2}, q^3, q^{-3}, \dots$$

Вычисляя производные v_1 в силу цепочки $v'_j = v_j^2(v_{j+1} - v_{j-1})$ получаем многочлены Нараяны ([Bonin, Shapiro & Simion 1993](#)):

$$v_1(0) = 1 = N_0(q), \quad v'_1(0) = 1 = N_1(q), \quad v''_1(0) = 1 + q = N_2(q),$$

$$v'''_1(0) = 1 + 3q + q^2 = N_3(q), \quad v^{(4)}_1(0) = 1 + 6q + 6q^2 + q^3 = N_4(q), \quad \dots$$

При различных целых q это опять даёт известные комбинаторные последовательности ($q = 1$ числа Каталана):

$$q = 2 : \text{A001003}, \quad q = 3 : \text{A007564}, \quad \dots \quad q = 11 : \text{A082173},$$

а коэффициенты по q образуют треугольник чисел Нараяны [A001263](#) (без начального члена N_0)

1						
1	1					
1	3	1				
1	6	6	1			
1	10	20	10	1		
1	15	50	50	15	1	
1	21	105	175	105	21	1

$$N_{n,k} = \frac{1}{k} \binom{n-1}{k-1} \binom{n}{k-1}$$

В этом случае EGF оказывается такой:

$$f(t) = w_1(t) = 1 + \int_0^t {}_1F_1\left(\frac{3}{2}, 3, 4cx\right) e^{(c-1)^2 x} dx, \quad c^2 = q. \quad (4)$$

При $c = 1$ это совпадает со старой формулой $f = {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, 2, 4t\right)$.

Итак,

для некоторых начальных условий функции w_1, \dots, w_r совпадают с EGF каких-то известных последовательностей и допускают замкнутое выражение.

Это даёт решение задачи — при условии, что мы можем обосновать это совпадение для всего ряда, а не только нескольких первых коэффициентов.

Есть два способа это делать.

Детерминантные формулы

Случай $r = 1$. Преобразование Ханкеля

Утверждение 2

Общее решение билинейной цепочки на полупрямой $j > 0$,

$$w_{j-1}w'_j - w'_{j-1}w_j = w_{j-2}w_{j+1}, \quad w_{-1} = w_0 = 1,$$

имеет вид

$$w_1 = f, \quad w_2 = f', \quad w_3 = \begin{vmatrix} f & f' \\ f' & f'' \end{vmatrix}, \quad w_4 = \begin{vmatrix} f' & f'' \\ f'' & f''' \end{vmatrix}, \quad \dots$$
$$w_{2k+1} = \begin{vmatrix} f & \dots & f^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots \\ f^{(k)} & \dots & f^{(2k)} \end{vmatrix}, \quad w_{2k+2} = \begin{vmatrix} f' & \dots & f^{(k+1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ f^{(k+1)} & \dots & f^{(2k+1)} \end{vmatrix}, \quad \dots,$$

где $f = f(t)$ произвольная гладкая функция.

Если f — многочлен, то цепочка обрывается нулями на конечный отрезок, но такие решения мы не рассматриваем.

Утверждение 3

Числа Каталана $c_n = C_{1,n}^1$ (1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, ...) удовлетворяют равенствам (и однозначно определяются ими)

$$\begin{aligned} c_0 = c_1 &= \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \dots \\ &= \begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_k \\ \dots & \dots & \dots \\ c_k & \dots & c_{2k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & \dots & c_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{k+1} & \dots & c_{2k+1} \end{vmatrix} = \dots = 1. \end{aligned}$$

Утверждение 4

Решение билинейной цепочки, построенное по EGF

$$f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 \frac{t^2}{2!} + \dots + c_n \frac{t^n}{n!} + \dots = {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, 2, 4t\right)$$

удовлетворяет начальным данным $w_j(0) = 1$ при всех $j \geq -1$.

Функции $u_j = \frac{w_{j-2}w_{j+1}}{w_{j-1}w_j}$ дают решение цепочки Вольтерры с начальным условием $u_0 = 0$, $u_j(0) = 1$, $j > 0$.

- Доказательство Утв. 2 легко следует из тождества Якоби для вронскианов

$$W(A, b) \frac{d}{dt} W(A, c) - \frac{d}{dt} W(A, b) W(A, c) = W(A) W(A, b, c),$$

где A — последовательность функций, возможно, пустая.

- Утв. 3 хорошо известно в комбинаторике, см. напр. Stanley, Enumerative combinatorics, vol. 2, 1999, [Aigner 1999](#), [Layman 2001](#).
- Утв. 4 ([Адлер, Шабат 2018](#)) следует из Утв. 1, 2 и 3; наоборот, если мы найдем $f(t)$ каким-то другим методом, то Утв. 3 будет следовать из Утв. 1, 2 и 4:

$$3 \xleftrightarrow{1,2} 4$$

- Переход от последовательности a_0, a_1, \dots к детерминантам

$$a_0, \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_k \\ \dots & \dots & \dots \\ a_k & \dots & a_{2k} \end{vmatrix}, \quad \dots$$

называется преобразованием Ханкеля. Утв. 3 можно сформулировать так: преобразования Ханкеля для чисел Каталана и для чисел Каталана без первого члена равны единичным последовательностям.

- Отображение последовательностей $a \rightarrow b$

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1, \quad b_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}, \quad b_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots$$

$$b_{2k} = \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_k \\ \dots & \dots & \dots \\ a_k & \dots & a_{2k} \end{vmatrix}, \quad b_{2k+1} = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & a_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k+1} & \dots & a_{2k+1} \end{vmatrix}, \quad \dots$$

является обратимым, при условии, что все $b_j \neq 0$. Утв. 3 означает, что числа Каталана — прообраз единичной последовательности при этом отображении.

Случай $r > 1$. Обобщённое преобразование Ханкеля

Утверждение 2'

Общее решение билинейной цепочки на полупрямой $j > 0$,

$$w_{j-1}w'_j - w'_{j-1}w_j = w_{j-r-1}w_{j+r}, \quad w_{-r} = \dots = w_0 = 1,$$

имеет вид

$$w_j = \det \left(f_{1+(i+k-1) \bmod r}^{(\lfloor \frac{i+k-1}{r} \rfloor + n)} \right) \Big|_{k,n=0}^m \quad \text{при } j = i + m(r+1), \quad i = \overline{1, r+1},$$

где f_1, \dots, f_r произвольные гладкие функции от t .

Предполагается, что все определители не обращаются тождественно в 0.

Понять принцип формирования определителей проще всего на примерах. При $r = 1$ это определители Ханкеля, которые мы уже видели. При $r = 3$ выписываем последовательность

$$\underline{f_1, f_2, f_3, f'_1, f'_2, f'_3, f''_1, f''_2, f''_3, f'''_1, f'''_2, f'''_3, \dots} \quad (5)$$

и строим вронскианы группами по $r + 1 = 4$, с подчёркнутыми элементами в левом верхнем углу:

$$w_1 = f_1, \quad w_2 = f_2, \quad w_3 = f_3, \quad w_4 = f'_1,$$

$$w_5 = \begin{vmatrix} \underline{f_1} & f_2 \\ f'_1 & f'_2 \end{vmatrix}, \quad w_6 = \begin{vmatrix} \underline{f_2} & f_3 \\ f'_2 & f'_3 \end{vmatrix}, \quad w_7 = \begin{vmatrix} \underline{f_3} & f'_1 \\ f'_3 & f''_1 \end{vmatrix}, \quad w_8 = \begin{vmatrix} \underline{f'_1} & f'_2 \\ f''_1 & f''_2 \end{vmatrix},$$

$$w_9 = \begin{vmatrix} \underline{f_1} & f_2 & f_3 \\ f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 \end{vmatrix}, \quad w_{10} = \begin{vmatrix} \underline{f_2} & f_3 & f'_1 \\ f'_2 & f'_3 & f''_1 \\ f''_2 & f''_3 & f'''_1 \end{vmatrix}, \quad w_{11} = \begin{vmatrix} \underline{f_3} & f'_1 & f'_2 \\ f'_3 & f''_1 & f''_2 \\ f''_3 & f'''_1 & f'''_2 \end{vmatrix}, \quad w_{12} = \begin{vmatrix} \underline{f'_1} & f'_2 & f'_3 \\ f''_1 & f''_2 & f''_3 \\ f'''_1 & f'''_2 & f'''_3 \end{vmatrix}$$

и так далее.

Обратим внимание, что при этом элементы в правом нижнем углу образуют исходную последовательность (5), а дополнительные к ним миноры — это вронскианы из предыдущей группы. Поэтому, если все $w_j \neq 0$, то преобразование от (5) к последовательности w_j обратимо.

Утверждение 3'

Обобщенные числа Каталана $C_{j,n}^r$ удовлетворяют равенствам (и однозначно определяются ими)

$$\det \left(C_{1+(i+k-1) \bmod r, \lfloor \frac{i+k-1}{r} \rfloor + n}^r \right) \Big|_{k,n=0}^m = 1, \quad \text{при } i = \overline{1, r+1}.$$

Например (опуская верхний индекс $r = 3$),

$$\begin{aligned} 1 &= C_{1,0} = C_{2,0} = C_{3,0} = C_{1,1} \\ &= \begin{vmatrix} C_{1,0} & C_{2,0} \\ C_{1,1} & C_{2,1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{2,0} & C_{3,0} \\ C_{2,1} & C_{3,1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{3,0} & C_{1,1} \\ C_{3,1} & C_{1,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{2,1} \\ C_{1,2} & C_{2,2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} C_{1,0} & C_{2,0} & C_{3,0} \\ C_{1,1} & C_{2,1} & C_{3,1} \\ C_{1,2} & C_{2,2} & C_{3,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{2,0} & C_{3,0} & C_{1,1} \\ C_{2,1} & C_{3,1} & C_{1,2} \\ C_{2,2} & C_{3,2} & C_{1,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{3,0} & C_{1,1} & C_{2,1} \\ C_{3,1} & C_{1,2} & C_{2,2} \\ C_{3,2} & C_{1,3} & C_{2,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{1,1} & C_{2,1} & C_{3,1} \\ C_{1,2} & C_{2,2} & C_{3,2} \\ C_{1,3} & C_{2,3} & C_{3,3} \end{vmatrix} = \dots \end{aligned}$$

и эти равенства однозначно определяют последовательность

$$C_{1,0}, C_{2,0}, C_{3,0}, C_{1,1}, C_{2,1}, C_{3,1}, C_{1,2}, C_{2,2}, C_{3,2}, C_{1,3}, C_{2,3}, C_{3,3}, \dots$$

Утверждение 4'

Решение билинейной цепочки, построенное по EGF f_1, \dots, f_r из Утв. 1 удовлетворяет начальным данным $w_j(0) = 1$ при всех $j \geq -r$.

Функции $u_j = \frac{w_{j-r-1}w_{j+r}}{w_{j-1}w_j}$ дают решение BL_r с начальным условием $u_0 = 0, u_j(0) = 1, j > 0$.

- Как и раньше, Утв. 2' следует из тождества Якоби.
- Утв. 3' — частный случай тождеств из [Krattenthaler 2010](#).
- Как и раньше, Утв. 3' и 4' эквивалентны по модулю Утв. 1 и 2':

$$3' \xLeftrightarrow{1,2'} 4'.$$

Недостатки детерминантного подхода

Мы вынуждены использовать комбинаторные тождества, природу и доказательства которых не понимаем.

В литературе доказано очень много тождеств типа Утв. 3', но не все нам нужны, а некоторых нужных нет.

Было бы лучше научиться строить решения, не выходя за рамки теории интегрируемых систем, а детерминантные формулы использовать в обратную сторону, для получения комбинаторных тождеств.

Симметричные редукции

Цепочку можно превратить в конечномерную систему, наложив какую-нибудь редукцию, совместную с динамикой. Если возможно подобрать редукцию так, чтобы выполнялось нужное нам начальное условие при $t = 0$, то решение с таким начальным условием удовлетворяет редукции при всех t .

Стандартный источник редукций — стационарные уравнения для симметрий. Действительно, пусть $u_t = f[u]$ и $u_\tau = g[u]$ симметрии, то есть

$$[\partial_t, \partial_\tau] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_t(g) = f_*(g)$$

(f_* — оператор линеаризации). Тогда стационарное уравнение $g = 0$ определяет инвариантное подмногообразие:

$$\partial_t(g) = 0 \Big|_{g=0}.$$

$r = 1$: редукция для цепочки Вольтерры

Для цепочки Вольтерры (то есть, VL_1)

$$u_{j,t} = u_j(u_{j+1} - u_{j-1})$$

имеются следующие симметрии порядка не выше 2 по сдвигам:

высшая симметрия: $u_{j,t_2} = u_j(T - T^{-1})(u_j(u_{j+1} + u_j + u_{j-1})),$

скейлинг: $u_{j,\tau_0} = tu_{j,t} + u_j,$

мастер-симметрия: $u_{j,\tau_1} = tu_{j,t_2} + u_j\left(\left(j + \frac{3}{2}\right)u_{j+1} + u_j - \left(j - \frac{3}{2}\right)u_{j-1}\right).$

- Члены с t необходимы для коммутативности с ∂_t . Без них, укороченные дифференцирования $\tilde{\partial}_{\tau_i}$ удовлетворяют соотношениям

$$[\tilde{\partial}_{\tau_0}, \partial_{t_k}] = k\partial_{t_k}, \quad [\tilde{\partial}_{\tau_1}, \partial_{t_k}] = k\partial_{t_{k+1}},$$

так что $\tilde{\partial}_{\tau_1}$ порождает высшие симметрии, начиная с $\partial_{t_1} = \partial_t$.

С учетом сдвига t , общая линейная комбинация имеет вид

$$u_{j,\tau_1} - 4au_{j,\tau_0} - du_{j,t} = 0.$$

Это 5-точечное разностное уравнение (включает u_{j-2}, \dots, u_{j+2}), но его можно дважды проинтегрировать.

Утверждение 5 (Адлер, Шабат 2019)

Цепочка Вольтерры совместна со связью

$$(q_{j+1} + q_j)(q_j + q_{j-1})u_j - 4(aq_j^2 + (-1)^j bq_j + c) = 0, \quad (6)$$

где $q_j := 2tu_j + j - d$.

- это дискретное уравнение Пенлеве dP_{34} (Grammaticos, Ramani 2014);
- связь (6) превращает цепочку Вольтерры, для каждой переменной u_j , в ОДУ эквивалентное P_5 (при $a \neq 0$) или P_3 (при $a = 0$);
- это не очень важно, так как при дополнительном ограничении на полупрямую Пенлеве вырождается в гипергеометрию.

Альтернативное доказательство Утверждения 4

При $t = 0$ связь (6) превращается в явное уравнение

$$u_j(0) = \frac{4a(j-d)^2 + (-1)^j b(j-d) + c}{4(j-d)^2 - 1}. \quad (7)$$

Решение цепочки Вольтерры с такими специальными начальными данными удовлетворяет связи (6) при всех t .

При выборе $a = 1$, $b = 0$, $d = -1/2$ и $c = -1/4$ получаем обрыв в нуле и единичную ступеньку: $u_0(0) = 0$, $u_j(0) = 1$, $j > 0$.

При этом уравнение цепочки при $j = 1$ сводится к уравнению Риккати

$$u_1' + u_1^2 + \left(\frac{2}{t} - 4\right)u_1 - \frac{2}{t} = 0, \quad u_1(0) = 1,$$

которое линеаризуется подстановкой $u_1 = f'/f$:

$$f'' + \left(\frac{2}{t} - 4\right)f' - \frac{2}{t}f = 0, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 1,$$

что и определяет гипергеометрическую функцию

$$f(t) = {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, 2, 4t\right).$$

Обобщение для чисел Нараяны

Мигающие начальные данные $u_{2k-1} = 1$, $u_{2k} = q$ в семейство (7) не помещаются. Чтобы их обслужить, нужно сделать дополнительную подстановку

$$u_{2k-1}u_{2k} = y_k, \quad u_{2k} + u_{2k+1} = z_k,$$

приводящую к цепочке Тоды в полиномиальной форме (так называемые переменные Флашки)

$$y_{k,t} = y_k(z_k - z_{k-1}), \quad z_{k,t} = y_{k+1} - y_k.$$

При этом симметрии ∂_{t_2} , ∂_{τ_0} и ∂_{τ_1} также переписываются в новых переменных, но ещё появляется дополнительная симметрия (сдвиг $z \rightarrow z + \varepsilon$):

$$y_{k,\tau_{-1}} = 0, \quad z_{k,\tau_{-1}} = 1.$$

Если добавить её в стационарное уравнение, получается нужное начальное условие. Окончательно, приходим к ответу $u_1 = f'/f$, где f — EGF (4) для многочленов Нараяны.

$$r > 1$$

К сожалению, тут всё портится. Проблема в катастрофическом усложнении мастер-симметрии. Уже при $r = 2$ она нелокальна (Zhang, Tu, Oevel & Fuchssteiner 1991). Формально, её можно записать, как результат применения оператора рекурсии R к скейлингу $u_{j,\tau_0} = u_j$:

$$u_{j,\tau_1} = R(u_j),$$

но сам R очень сложен (Wang 2012):

$$R = u_j(T - T^{-r})(T - 1)^{-1} \prod_{i=1}^{\widehat{r}} (T^{r+1-i}u_j - u_jT^{-i})(T^{r-i}u_j - u_jT^{-i})^{-1}.$$

Правда, его применение к $u_{j,t}$ даёт локальные высшие симметрии, но для скейлинга это не так.

При $r = 2$ ещё можно выписать, при помощи компьютера, громоздкую 9-точечную связь, и проверить, что она действительно обслуживает единичную ступеньку. Но, вытащить из неё гипергеометрию довольно трудно. При $r = 3$ вычисления кажутся безнадежными.

Заключение

Основное наблюдение: несложные эксперименты с рядами Тейлора приводят к обнаружению неожиданных точных решений в интегрируемых уравнениях. Это не только цепочки Богдавленского и не только ступеньки — таких примеров на удивление много.

На данный момент непонятно, есть ли какое-то общее происхождение у таких результатов, как их систематизировать и как доказывать. Мы описали два подхода, которые, иногда, что-то позволяют делать:

- сравнение уравнений в подходящих переменных (тау-функции) с комбинаторными тождествами,
- симметричные конечномерные редукции.