АКАДЕМИЯ НАУК СССР

БАШКИРСКИЙ ФИЛИАЛ

Отдел физики и математики

А.Б.Шабат, Р.И.Ямилов

О ПОЛНОМ СПИСКЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ВИДА:

$$i u_t = u_{xx} + f(u, v, u_x, v_x), \quad -i v_t = v_{xx} + g(u, v, u_x, v_x)$$

Препринт доклада

Президиуму Башкирского филиала АН СССР

УФА 1985

Шабат А.Б., Ямилов Р.И. О полном списке интегрируемых систем уравнений вида: $iu_t = u_{xx} + f(u, v, u_x, v_x)$, $-iv_t = v_{xx} + g(u, v, u_x, v_x)$ Препринт. Уфа, 1985.

Системы уравнений указанного в заглавии вида часто возникают в различных задачах теоретической физики и, поэтому, последнее десятилетие велся интенсивный поиск интегрируемых случаев (см. библиографию в [1,2]). В работах А.В.Михайлова, А.Б.Шабата 1985года [1,2] указан способ получения полного списка этих интегрируемых случаев. Наш препринт является продолжением [1,2]. Здесь уточняется вид двух дополнительных необходимых условий интегрируемости и исследованы отмеченные в [2] случаи, для полного описания которых недостаточно рассмотренных в [2] условий.

В процессе работы над завершением списка интегрируемых случаев выявилась целесообразность использования современных средств аналитических вычислений на ЭВМ. Мы благодарим И.М.Бакирова и С.И.Свинолупова за разработку подходящей программы на языке FORMAC. Без участия И.М.Бакирова этот опыт использования ЭВМ при реализации сложной математической схемы рассуждений не принес бы ощутимых результатов.

§ 1. Условия интегрируемости

Задача о составлении полного списка интегрируемых случаев сводится, как указано в [1,2], к перечислению систем уравнений

$$u_t = u_2 + f(u, v, u_1, v_1), \quad -v_t = v_2 + g(u, v, u_1, v_1), \tag{1.1}$$

удовлетворяющих, в определенном смысле явным, условиям интегрируемости (мы придерживаемся обозначений [1,2] : $i\,\partial/\partial t$ заменено на $\partial/\partial t$, $u_k = \partial^k u/\partial x^k$, $v_k = \partial^k v/\partial x^k$). Первая группа условий (канонические законы сохранения) записывается в виде

$$\partial \rho_k/\partial t = \partial \sigma_k/\partial x, \quad k = 1, 2, 3, 4, \tag{1.2}$$

вторая представляется в виде так называемых условий дивергентности:

$$\rho_k^\circ = \partial \varphi_k/\partial x, \quad k = 1, 2, 3, 4. \tag{1.3}$$

Функции ρ_k , σ_k , ρ_k° , φ_k переменных u , v , u_1 , v_1 , u_2 , v_2 , ..., рассматриваемых как независимые, вычисляются через правые части f , g рассматриваемой системы (1.1) по следующим реккурентным формулам (ср. [2]) :

$$\rho_1^\circ = \frac{1}{2}(f_{u_1} + g_{v_1}), \quad \rho_1 = \frac{1}{2}(f_{u_1} - g_{v_1}), \tag{1.4}$$

$$\rho_2^\circ = (\varphi_1)_t - \rho_1^\circ \rho_1 + f_u - g_v , \tag{1.5}$$

$$\rho_3^\circ = (\varphi_2)_t + 2\rho_1^\circ f_{v_1} g_{u_1} - 2(f_{v_1} g_u + g_{u_1} f_v), \tag{1.6}$$

$$\rho_2 = \sigma_1 - \frac{1}{2}[(\rho_1^\circ)^2 + \rho_1^2] - f_{v_1} g_{u_1} + f_u + g_v, \quad \rho_3 = \sigma_2 . \tag{1.7}$$

Плотности ρ_4° , ρ_4 двух дополнительных условий интегрируемости, о которых говорилось во введении, являются достаточно сложными образованиями:

$$\begin{aligned} \rho_4^\circ = {} & (\varphi_3)_t + (f_u + g_v)_t + \rho_2^\circ \rho_2 + \rho_1[\rho_3^\circ - (\varphi_2)_t] + \\ & + D(\rho_1^\circ) D(\rho_1) + \rho_1^\circ [D(f_{v_1}) g_{u_1} - D(g_{u_1}) f_{v_1}] + \\ & + D(g_{v_1}) g_v - D(f_{u_1}) f_u + 2 D(g_{u_1}) f_v - 2 D(f_{v_1}) g_u, \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} \rho_4 = {} & \sigma_3 + (f_u - g_v)_t + \frac{1}{2}[(\rho_2^\circ)^2 + \rho_2^2] - \\ & - \rho_1^\circ[\rho_3^\circ - (\varphi_2)_t] + \frac{1}{2}[(D\rho_1^\circ)^2 + (D\rho_1)^2] + \\ & + \rho_1[D(f_{v_1}) g_{u_1} - D(g_{u_1}) f_{v_1}] - (f_{v_1})_t g_{u_1} + (g_{u_1})_t f_{v_1} - \\ & - D(g_{v_1}) g_v - D(f_{u_1}) f_u + 2D(g_{u_1}) f_v + 2D(f_{v_1}) g_u - \\ & - f_{v_1}^2 g_{u_1}^2 + 2 f_{v_1} g_{u_1} (f_u + g_v) - 2 D(f_{v_1}) D(g_{u_1}) - \\ & - 4 f_v g_u . \end{aligned} \tag{1.9}$$

Проверку условий интегрируемости для "любой" конкретной системы (1.1) можно выполнить при помощи имеющейся в нашем распоряжении программы на языке FORMAC. По крайней мере в этом смысле условия интегрируемости (1.2)-(1.9) являются явными. Излагаемая ниже схема вывода формул (1.4)-(1.9) также допускает реализацию на языке FORMAC (ср. [3,4]), так что в принципе рассматриваемый подход дает эффективный способ проверки интегрируемости любой системы уравнений вида (1.1) на основе соответствующей программы аналитических вычислений на ЭВМ. Возникающие при этом подходе технические трудности можно представить, оценив число подобных членов при работе с формулами типа (1.8),(1.9).

Затруднения, связанные с формулами (1.8),(1.9), принуждают отбросить все "лишнее" в общей схеме [1,2,5] вывода условий (1.2)-(1.9). Уточненная схема вывода сводтся к следующему. Перейдя от системы уравнений (1.1) к уравнению в вариациях

$$(\overrightarrow{\delta u})_t = F_*(\overrightarrow{\delta u}), \quad F_* = \sigma(D^2 + F_1 D + F_0),$$

где $\sigma = \mathrm{diag}(1,-1)$, $D = \partial/\partial x$ и

$$F_1 = \begin{bmatrix} f_{u_1} & f_{v_1} \\ g_{u_1} & g_{v_1} \end{bmatrix}, \quad F_0 = \begin{bmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{bmatrix}, \qquad (1.10)$$

рассмотрим следующие два уравнения для операторов L и R

$$L_t - F_* L + L F_* = 0, \qquad (1.11)$$

$$R_t + F_*^{\tau} R + R F_* = 0. \qquad (1.12)$$

В последнем уравнении F_*^{τ} - оператор, сопряженный к F_* , т.е.

$$F_*^{\tau} = [D^2 - F_1^{\tau} D + F_0^{\tau} - D(F_1^{\tau})]\,\sigma.$$

В работе [1] показано, что для системы (1.1), обладающей локальными законами сохранения достаточно большого порядка операторные уравнения (1.11),(1.12) разрешимы в классе формальных рядов $\sum_{k\geq -n} a_k D^{-k}$, $n\in\mathbb{Z}$, коэффициенты a_k , $k=-n, -n+1, \ldots$, которых являются матричными функциями переменных u , v , u_1 , v_1 , ..., рассматриваемых как независимые. Соотношения (1.2),(1.9) получаются в процессе последовательного вычисления коэффициентов формальных рядов L и R при подстановке этих рядов в (1.11) и (1.12) соответственно, после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях D . При этом нужно иметь в виду, что

$$D[h(u,v,u_1,v_1,\ldots)] = 0 \Rightarrow h = \mathrm{const},$$

т.е. $\mathrm{Ker}\, D = \mathbb{C}$ и, что уравнение $D(h) = h_1$ разрешимо только при специальном выборе правой части h_1 . Например, если $h_1 = h_1(u,v,u_1,v_1) \in \mathrm{Im}\, D$, то

$$h_1 = p(u,v)u_1 + q(u,v)v_1 \quad , \; p_v = q_u \; .$$

Можно, не ограничивая общности (см. [1]) считать, что

$$L = \sigma^{n+1} D^n + A D^{n-1} + B D^{n-2} + \ldots \qquad (1.13)$$

$$R=\sigma_1 e^{\varphi}(\sigma^{n+1}D^{n}+aD^{n-1}+bD^{n-2}+\dots),\quad \sigma_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}. \qquad (1.14)$$

При подстановке (1.14) в (1.12) коэффициенты при D^{n+2} сокращаются, а равенство нулю коэффициента при D^{n+1} дает (ср. (1.3),(1.4)) первое из условий дивергентности

$$D(\varphi)=\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,F_1=\frac{1}{2}\,(f_{u_1}+g_{v_1}). \qquad (1.15)$$

Вычисления существенно упрощаются, если при выводе необходимых условий (1.2)-(1.9) разрешимости уравнений (1.11),(1.12) наряду с соотношением

$$\mathrm{trace}\ \mathrm{res}\,(L_t)\in \mathrm{Im}\,D \qquad (1.16)$$

использовать также включение

$$\mathrm{trace}\ \mathrm{res}\,[(\sigma_1 e^{-\varphi}R)_t+S\sigma_1 e^{-\varphi}R]\in \mathrm{Im}\,D, \qquad (1.17)$$

где

$$S=\varphi_t+F_*+\sigma_1 e^{-\varphi}F_*^{\tau}e^{\varphi}\sigma_1. \qquad (1.18)$$

Отметим, что при выполнении первого условия дивергентности (1.15) дифференциальный оператор (1.18) имеет нулевой порядок и выполняются соотношения

$$S=\begin{bmatrix}\varphi_{11}&\varphi_{12}\\ \varphi_{21}&\varphi_{22}\end{bmatrix},\quad S^{\parallel}\overset{\text{опр}}{=}\begin{bmatrix}\varphi_{11}&0\\0&\varphi_{22}\end{bmatrix}=\rho_2^{\circ}-D(\rho_1),$$

$$S^{\perp}\overset{\text{опр}}{=}\begin{bmatrix}0&\varphi_{12}\\ \varphi_{21}&0\end{bmatrix}=\sigma\left[2F_0-\rho_1^{\circ}F_1-D(F_1)\right]^{\perp},$$

где функции ρ_1, ρ_1°, ρ_2° выражаются формулами (1.4), (1.5).

Выше в (1.16),(1.17) используется известное наблюдение о том, что при обращении с формальными рядами вида $\sum a_k D^{-k}$ формула

$$\mathrm{trace}\ \mathrm{res}\,(\sum a_k D^{-k})\overset{\text{опр}}{=}\mathrm{trace}\ a_1$$

может служить определением "следа оператора" $\sum a_k D^{-k}$. Включения (1.16),(1.17) являются следствием (1.11), (1.12) и справедливой для любых формальных рядов $\sum a_k D^{-k}$, $\sum b_k D^{-k}$ формулы

$$\mathrm{trace}\ \mathrm{res}\,[\sum a_k D^{-k}, \sum b_k D^{-k}]\in \mathrm{Im}\,D.$$

Нужные нам соотношения (1.2), $k=2,3,4$ следуют из (1.13),(1.16) при $n=k-1$, а соотношения (1.3) при $k=2,3,4$ из (1.14),(1.17) при $n=k-3$. Например при $k=2$, $n=-1$ соотношения (1.14),(1.17) дают $\mathrm{trace}\,(S)\in \mathrm{Im}\,D$, т.е. $\rho_2^{\circ}\in \mathrm{Im}\,D$. В процессе вычислений находятся формулы для коэффициентов рядов (1.13),(1.14) в терминах коэффициентов (1.10) оператора F_* и плотностей ρ_k, ρ_k°. Например

$$a^{\parallel}=\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(\sigma^{n})\,\sigma F_1^{\perp},$$

$$2\sigma^{n}a^{\perp}=\varphi_1-\rho_1+n\,(\rho_1+\sigma\rho_1^{\circ}).$$

§ 2. Системы уравнений линейные по производным

Для системы (1.1) линейной по u_1, v_1 структура коэффициентных функций определяется двумя первыми условиями дивергентности (1.3). Из $f_{u_1}+g_{v_1}=h(u,v)\in$ $\in \operatorname{Im} D$ следует, что $h=0$, $f_{u_1}=-g_{v_1}=r(u,v)$ и, следовательно,

$$f=ru_1+\bar p v_1+\bar q,\quad g=-rv_1-pu_1+q \qquad (2.1)$$

Второе условие дивергентности эквивалентно соотношениям

$$p_v=\chi_u,\ \bar p_u=\chi_v;\ q=z_u,\ \bar q=z_v. \qquad (2.2)$$

При этом $\rho_2^0=D(r+\chi)$, $\rho_1=r$, $\rho_1^0=0$.

Анализ условий интегрируемости (1.2)-(1.9) связан с уточнением вида плотностей (1.4)-(1.9). Используемые при этом тождества (ср. [2]) в рассматриваемом случае (2.1),(2.2) записываются следующим образом:

$$[\rho(u,v)]_t=D(\rho_u u_1-\rho_v v_1)+rD(\rho)+ \qquad (2.3)$$

$$+p\rho_v u_1+\bar p\rho_u v_1-z_u\rho_v+z_v\rho_u+v_1^2\rho_{vv}-u_1^2\rho_{uu},$$

$$[h_u u_1-h_v v_1]_t=2(u_1v_1+z)D(h_{uv})+2h_{uv}\cdot \qquad (2.4)$$

$$\cdot(pu_1^2-\bar p v_1^2)+D^3(h)+D\{-4h_{uv}u_1v_1+r(h_u u_1-$$

$$-h_v v_1)+\bar p h_u v_1-p h_v u_1-2h_{uv}z+z_u h_v+z_v h_u\},$$

$$(u_1v_1)_t=u_1v_1D(r)+\tfrac12 u_1^2D(p)+\tfrac12 v_1^2D(\bar p)-u_1^2z_{uu} \qquad (2.5)$$

$$+v_1^2z_{vv}+D[v_1u_2-u_1v_2+ru_1v_1+\tfrac12(pu_1^2+\bar p v_1^2)].$$

Из (2.3),(2.4) в частности следует, что существование закона сохранения порядка не выше первого:

$$(h_u u_1-h_v v_1+\rho)_t\in \operatorname{Im} D$$

эквивалентно соотношениям

$$h_{uv}=\mathrm{const},\ \rho_{uu}=2ph_{uv},\ \rho_{vv}=2\bar p h_{uv}, \qquad (2.6)$$

$$\rho_u z_v=\rho_v z_u,\ \rho_u(r-\chi)_v=\rho_v(r-\chi)_u. \qquad (2.7)$$

Из (2.3),(2.4),(2.6),(2.7) находим, что условия ρ_{1t}, $\rho_3^0\in \operatorname{Im} D$ выполняются в том и только в том случае, если

$$r_{uu}=r_{vv}=0,\ r_u\chi_v=r_v\chi_u,\ r_u z_v=r_v z_u, \qquad (2.8)$$

$$\chi_{uu}=\chi_{vv}=0,\ \chi_v z_u+2\bar p z_{uu}=\chi_u z_v+2p z_{vv}. \qquad (2.9)$$

При этом

$$\rho_2=(2r-\chi)_u u_1-(2r-\chi)_v v_1+r^2+p\bar p+2z_{uv}, \qquad (2.10)$$

$$\rho_4^0=\rho_{2t}+[\chi_u u_1-\chi_v v_1+p\bar p+Q+\tfrac12 r^2]_t+ \qquad (2.11)$$

$$+\rho_2^0\rho_2+2D(\bar p)[p_u u_1-r_u v_1-z_{uu}]-2D(p)[r_v u_1+$$

$$+\bar p_v v_1+z_{vv}]+D(r)[p_v u_1-\bar p_u v_1+(r_v v_1-r_u u_1)-$$

$$-2z_{uv}]+2r[\bar p(r_u v_1+p_u u_1)+p(r_v u_1+\bar p_v v_1)],$$

где функции $\hat{r}$, Q определяются соотношениями

$$\hat{r}_u = r_v p, \quad \hat{r}_v = r_u \bar{p}; \tag{2.12}$$

$$Q_u = p(2r-\chi)_v + r\chi_u, \quad Q_v = \bar{p}(2r-\chi)_u + r\chi_v,$$

Условия совместности для (2.12) следуют из (2.8), (2.9). Из (2.8)-(2.12) и условий $\rho_{2t}, \rho_4^0 \in \operatorname{Im} D$ находим, что

$$\bar{p}_v p_{uu} = 0, \tag{2.13}$$

$$\bar{p} p_{uu} + (2\chi + r)_v p_u + 3p(\chi - r)_{uv} + 2z_{uvuu} = 0,$$

$$\bar{p} p_{uu} + (4r-\chi)_v p_u + 2p(r-\chi)_{uv} = \chi_u (r-\chi)_u .$$

Должны также выполняться соотношения, полученные из (2.13) заменой $u \leftrightarrow v$, $p \leftrightarrow \bar{p}$.

Дальнейший анализ (см. замечания ниже) приводит к следующему списку уравнений, удовлетворяющих условиям интегрируемости (1.2)-(1.9).

Случай $\overline{\mathrm{I}}$: $r = 0$, $p = \bar{p} = 0$.

$$u_t = u_2 + u^2 v, \quad -v_t = v_2 + v^2 u, \tag{2.14}$$

$$u_t = u_2 + (u+v)^2, \quad -v_t = v_2 + (u+v)^2. \tag{2.15}$$

Случай $\overline{\mathrm{II}}$: $r = 0$, $\chi = 0$.

$$u_t = u_2 + v v_1, \quad v_t = -v_2 + u u_1, \tag{2.16}$$

$$u_t = u_2 + v_1, \quad v_t = -v_2 + u u_1, \tag{2.17}$$

$$u_t = u_2 + v_1 + (u+v)^2, \quad v_t = -v_2 + u_1 - (u+v)^2. \tag{2.18}$$

Случай $\overline{\mathrm{III}}$: $r = 0$, $\chi = 2uv$, $u+v$, u.

$$u_t = u_2 + u^2 v_1 - \tfrac{1}{2} u^3 u^2, \quad v_t = -v_2 + v^2 u_1 + \tfrac{1}{2} u^2 v^3; \tag{2.19}$$

$$u_t = u_2 + (u+v) v_1 - \tfrac{1}{6}(u+v)^3, \quad v_t = -v_2 + (u+v) u_1 + \tfrac{1}{6}(u+v)^3. \tag{2.20}$$

Случай $\overline{\mathrm{IV}}$: $r = 2uv$.

$$u_t = u_2 + 2uvu_1 + \alpha u^2 v_1 + u z', \quad v_t = -v_2 + 2uvv_1 + \alpha v^2 u_1 - v z', \tag{2.21}$$

$$z' = \tfrac{1}{2}\alpha(1-\alpha) u^2 v^2 + \beta uv + \gamma,$$

$$u_t = u_2 + 2uvu_1 + (u^2 + \delta) v_1, \quad v_t = -v_2 + 2uvv_1 + (v^2 + \bar{\delta}) u_1. \tag{2.22}$$

Случай $\overline{\mathrm{V}}$: $r = 2(u+v)$.

$$u_t = u_2 + D(u^2 + 2uv), \quad v_t = -v_2 + D(v^2 + 2uv) \tag{2.23}$$

$$u_t = u_2 + 2(u+v)u_1 + 2\gamma v_1 + q, \quad v_t = -v_2 + 2(u+v)v_1 + 2\gamma u_1 - q, \tag{2.24}$$

$$q = \gamma(u+v)^2 + \beta(u+v) + \delta$$

Случай $\overline{\mathrm{VI}}$: $r = 2u$.

$$u_t = u_2 + D(u^2 + v), \quad v_t = -v_2 + 2D(uv), \tag{2.25}$$

$$u_t = u_2 + D\left(u^2 + \tfrac{1}{v}\right), \quad v_t = -v_2 + 2D(uv) \cdot 1. \tag{2.26}$$

Замечание 1. Уравнения удовлетворяющие условиям интегрируемости допускают, как правило, группу преобразований. Например, система (2.19) ((2.20)) инвариантна относительно растяжений (сдвигов):

$u \to u e^{\tau}$, $v \to v e^{-\tau}$ ($u \to u + \tau$, $v \to v - \tau$)

Уравнения связанные с (2.19) ((2.20)) заменами

$$u \to u e^{\lambda x + \mu t}, \quad v \to v e^{-\lambda x - \mu t} \quad (u \to u + \lambda x + \mu t, \ v \to v - \lambda x - \mu t) \tag{2.27}$$

также удовлетворяют условиям (1.2)-(1.9). Кроме преобразований (2.27) уравнений (2.18)-(2.21), (2.24) при формировании списка использовались масштабные преобразования, перестановка $u \leftrightarrow v$ и преобразование Галилея (переход в движущуюся систему координат).

Замечание 2. Уравнения (2.2), (2.8), (2.9), (2.13) не всегда полностью определяют вид рассматриваемой системы. В этом случае приходится обращаться к условиям $\rho_{3t}, \rho_{4t} \in \operatorname{Im} D$ и пользоваться соотношениями (2.3)-(2.7). Из (2.5) следует, например, что $\operatorname{ord} \rho_3$ или $\operatorname{ord} \rho_4 = 2 \Rightarrow p_u = \bar{p}_v = 0$. Для контроля вычислений использовалась программа на языке FORMAC. Ниже приводится два примера.

В случае I имеем $u_t = u_2 + z_v$, $-v_t = v_2 + z_u$, $z_{uu} z_{vv} \neq 0$. Из (2.13) следует, что $z_{uvuu} = z_{uvvv} = 0$. При этом $\rho_3 = 2(z_{uvu} u_1 - z_{uvv} v_1)$, $\rho_4 = D^{-1}(\rho_{3t}) + z_{uv}^2 - 4 z_{uu} z_{vv}$ и последнее из условий интегрируемости $\rho_{4t} \in \operatorname{Im} D$ эквивалентно, как можно проверить, пользуясь (2.3)-(2.5), уравнениям

$$z_{uuuu} = z_{vvvv} = 0,\quad z_v (z_{uu} z_{vv})_u = z_u (z_{uu} z_{vv})_v.$$

При $z_{uvuv} \neq 0$ получаем (2.14), при $z_{uvuv} = 0$ - (2.15).

В случае VI имеем $\chi = 2\lambda_u$, $z_v = 0$, $\bar{p} z_{uu} = 0$ ($\bar{p} \neq 0$). Из (2.13) следует, что $p_u = 0$, $\lambda = 1$

$6 \bar{p}_v + p \bar{p}_{vv} = 0$, т.е.

$$u_t = u_2 + 2uu_1 + (\gamma - \alpha/v^2) v_1,\quad v_t = -v_2 + 2uv_1 + 2vu_1 + \delta.$$

При этом $\rho_2 = 2u_1 + 4\gamma v$, $\gamma\delta = 0$,

$$\rho_4 = 8\gamma(vu_1 - uv_1 + 2u^2 v + \gamma v^2) + \frac{4\alpha(\delta - \alpha)}{v^2} - 8\alpha\gamma \ln v + \operatorname{Im} D + \mathbb{C}.$$

При $\delta \neq 0$ ($\gamma = 0$) получаем $\alpha = \delta$, т.е. (2.26), однако остается неясным обладает ли полученная система законами сохранения высокого порядка.

§ 3. Системы уравнений близкие к $u_t = u_2 + v_1^2$, $-v_t = v_2 + u_1^2$

В этом параграфе рассматриваются уравнения вида (1.1), удовлетворяющие условию $\partial^2 f / \partial v_1^2 \neq 0$, $\partial^2 g / \partial u_1^2 \neq 0$. В работе [2] показано, на основе условий интегрируемости (1.2)-(1.7), что такие системы подходящей заменой

$$\bar{u} = U(u),\quad \bar{v} = V(v) \tag{3.1}$$

и преобразованием Галилея приводятся к виду

$$u_t = u_2 + v_1^2 + \bar{p} v_1 + \bar{q},\quad -v_t = v_2 + u_1^2 - p u_1 + q, \tag{3.2}$$

$$\bar{p} = R_u,\quad p = R_v,\quad \bar{q} = z_v,\quad q = z_u$$

где функции R, z определяются условиями (1.2)-(1.7) с точностью до конечного числа параметров. В частности из $\rho_{2t} \in \operatorname{Im} D$ следует, что

$$R_{uu} + R_v = \bar{\gamma},\quad R_{vv} + R_u = \gamma;\quad \gamma, \bar{\gamma} \in \mathbb{C}. \tag{3.3}$$

Общее решение системы уравнений (3.3) выражается формулой

$$R=\alpha e_\lambda+\bar\alpha e_{\bar\lambda}+\alpha_1 e_1+\gamma u+\bar\gamma v+\mathrm{const};\quad e_1=\exp(-u-v),\tag{3.4}$$
$$e_\lambda=\exp(-\lambda u-\bar\lambda v);\ e_{\bar\lambda}=\exp(-\bar\lambda u-\lambda v),\ \lambda=\exp(2\pi i/3),\ \bar\lambda=\lambda^2.$$

Для системы уравнений (3.2),(3.3)

$$\rho_2^0=D(\gamma u+\bar\gamma v-R);\quad \rho_2=-4u_1v_1+au_1+bv_1+\rho;$$
$$-a=\gamma+R_u,\ b=\bar\gamma+R_v,\ \rho=R_uR_v+2Z_{uv};$$

$$\rho_3^0=D[(\gamma-R_u)u_1+(R_v-\bar\gamma)v_1]+Au_1+Bv_1+C;\tag{3.5}$$
$$A=(R_vR_{uu}+2R_{uv}R_u-4Z_{vv}),\ B=(R_uR_{vv}+2R_{uv}R_v-4Z_{uu})$$
$$C=2R_vZ_{vv}+Z_vR_{vv}-2R_uZ_{uu}-Z_uR_{uu}.$$

Формула (1.8) дает

$$\rho_4^0=(\varphi_3+f_u+g_v)_t+\rho_2^0\rho_2+2f_vD(g_{u_1})-2g_uD(f_{v_1});$$

причем условие $\rho_3^0=D(\varphi_3)$, т.е. $C=0$, $A_v=B_u$ выполнено в том и только в том случае, если

$$4(Z_{uuu}-Z_{vvv})=\bar\gamma R_u-\gamma R_v,\tag{3.6}$$
$$2R_uZ_{uu}+Z_uR_{uu}=2R_vZ_{vv}+Z_vR_{vv}.$$

Собирая в ρ_4^0 члены эквивалентные u_1v_1 и приравнивая полученное выражение нулю, находим, что $2(Z_{uuu}-Z_{vvv})=\bar\gamma R_u-\gamma R_v$. Следовательно

$$\bar\gamma R_u=\gamma R_v,\quad Z_{uuu}=Z_{vvv}.\tag{3.7}$$

Условие $\rho_{2t}\in \operatorname{Im} D$ эквивалентно, в обозначениях (3.5), соотношениям

$$Z_{uvvv}+Z_{uvu}-2Z_{vv}+\gamma R_{uv}=0,\ Z_{uvuu}+Z_{uvv}-\tag{3.8}$$
$$-2Z_{uu}+\bar\gamma R_{uv}=0,\ \bar\gamma\rho_u=\gamma\rho_v,\ Z_u\rho_v=Z_v\rho_u.$$

Анализ полученных соотношений приводит к следующему списку уравнений вида (3.2),(3.4) удовлетворяющих условиям (1.2)-(1.9):

$$u_t=u_2+v_1^2,\ -v_t=v_2+u_1^2\quad (R=Z=0);\tag{3.9}$$
$$R=0,\ Z=\beta e_\lambda^2+\bar\beta e_{\bar\lambda}^2+\beta_1e_1^2;\tag{3.10}$$
$$R=0,\ Z=\beta e_\lambda e_{\bar\lambda}+\beta_1e_\lambda e_1+\bar\beta_1e_{\bar\lambda}e_1;\tag{3.11}$$
$$R=\alpha e_\lambda+\bar\alpha e_{\bar\lambda}+\alpha_1e_1,\ Z=0;\tag{3.12}$$
$$R=\alpha e_\lambda+\bar\alpha e_{\bar\lambda}+\alpha_1e_1,\ Z=\frac{1}{12}[-\alpha^2e_\lambda^2-\bar\alpha^2e_{\bar\lambda}^2-\tag{3.13}$$
$$-\alpha_1^2e_1^2+2\alpha\bar\alpha e_\lambda e_{\bar\lambda}+2\alpha\alpha_1e_\lambda e_1+2\bar\alpha\alpha_1e_{\bar\lambda}e_1];$$

$$R=\alpha e_1,\ Z=\beta e_\lambda e_{\bar\lambda}+\beta_1e_1^2.\tag{3.14}$$

Из (3.4) и очевидного соотношения $\lambda+\bar\lambda=1$ следует, что

$$e_\lambda e_{\bar\lambda}=e^{u+v},\ e_\lambda e_1=e^{\bar\lambda u+\lambda v},\ e_{\bar\lambda}e_1=e^{\lambda u+\bar\lambda v}.$$

Используя масштабные преобразования можно привести уравнения (3.10)-(3.14) к каноническому виду с параметрами α, $\bar\alpha$, α_1, β, $\bar\beta$, β_1, $\bar\beta_1$ равными нулю или единице. Дискретная группа растяжений ($u \to \lambda^n u$, $v \to \bar\lambda^n v$, $n = 1, 2, 3$), допускаемая уравнением вида (3.2), дает в применении к (3.14) еще две эквивалентные системы. Для уравнений (3.14) и (3.9) допустимы также замены типа $u \to u + \delta_1 x + \delta_2 t$, $v \to v + \delta_3 x + \delta_4 t$ (ср. замечание 1, § 1). При составлении списка можно считать, что $\gamma = \bar\gamma = 0$, т.к. справедлива следующая

Лемма. При $|\gamma| + |\bar\gamma| \neq 0$ система уравнений (3.2), (3.4) допускает группу сдвигов и сводится к (3.14).

Доказательство. Из (3.7),(3.4) следует, что с точностью до растяжений возможны два варианта:

$$R = \alpha \ell_1 + \gamma(u+v), \quad \alpha \neq 0; \quad R = \gamma u + \bar\gamma v. \tag{3.15}$$

В случае инвариантном относительно сдвигов ($R_u = R_v$, $Z_u = Z_v$) из (3.7),(3.8) находим

$$Z = -\frac{\alpha\gamma}{2}\ell_1 + \beta_1 \ell_1^2 + \beta \ell_\lambda \ell_{\bar\lambda} + \delta(u+v)$$

Нетрудно проверить, что этот случай сводится к (3.14). Из (3.6)-(3.8) следует далее, что $Z_u = Z_v$ при $\alpha \neq 0$ в (3.15). При $R = \gamma u + \bar\gamma v$ из (3.6)-(3.8) следует, что в дополнение к уже рассмотренному случаю и случаю $Z = \delta_1 u + \delta_2 v$, сводящемуся к (3.9), возможен вариант

$$Z = \delta u v + \delta_1 u + \delta_2 v, \quad \delta \neq 0 \Leftrightarrow Z = \delta u v.$$

Для соответствующей системы $f = v_1^2 + \gamma v_1 + \delta u$,

$$g = u_1^2 - \bar\gamma u_1 + \delta v; \quad \rho_2 = -2(2u_1 v_1 + \gamma u_1 - \bar\gamma v_1), \quad -\frac{1}{2}\rho_3 =$$

$$= 2(v_1 u_2 - u_1 v_2) + \frac{4}{3}(v_1^3 - u_1^3) + 2\gamma v_1^2 + 2\bar\gamma u_1^2 + \delta(\gamma u + \bar\gamma v) + \operatorname{Im} D + C.$$

Коэффициент при u_1^3 в ρ_{3t} равен 8δ и поэтому $\delta = 0$. При $\delta = 0$ рассматриваемая система инвариантна относительно сдвигов и сводится к (3.9).

§ 4. Несимметричные уравнения

В этом параграфе рассматривается случай

$$\begin{aligned} u_t &= u_2 + r u_1 + \bar p v_1 + \bar q, \\ v_t &= -v_2 + 2\alpha u_1 v_1 + b u_1^2 + r v_1 + p u_1 - q, \end{aligned} \tag{4.1}$$

обобщающий (2.1) и являющийся в некотором смысле вырождением (3.2). Сначала рассматриваются системы (4.1) с $\alpha = 0$:

$$f = r u_1 + \bar p v_1 + \bar q, \quad -g = b u_1^2 + r v_1 + p u_1 - q, \tag{4.2}$$

для которых из условия $\rho_2^0 \in \operatorname{Im} D$ следует, что

$$b = b(u), \quad q = Z_u, \quad \bar q = Z_v, \quad \bar p_{uu} = p_{vv}. \tag{4.3}$$

Из тождеств типа (2.3),(2.4), справедливых для любой системы (1.1)

$$\rho_t = D(\rho_u u_1 - \rho_v v_1) + \rho_u f - \rho_v g + v_1^2 \rho_{vv} - u_1^2 \rho_{uu}, \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} (A u_1 + B v_1)_t &= D^2(A u_1 - B v_1) + D(2 C u_1 v_1 + A f - B g \\ &+ v_1^2 B_v - u_1^2 A_u) + C(u_1 g + v_1 f) - u_1 v_1 D(C), \quad C = B_u - A_v, \end{aligned} \tag{4.5}$$

следует, что условие вида $(Au_1+Bv_1+\rho)_t\in \mathrm{Im}\,D$ эквивалентно, в случае (4.2),(4.3), соотношениям

$$A_v=B_u,\ \rho_{vv}=0,\ \rho_{uu}=b\rho_v,$$

$$\rho_u z_v=\rho_v z_u,\ \rho_u(r_v-\bar p_u)=\rho_v(r_u-p_v+\bar p b). \tag{4.6}$$

Схема получения дифференциальных уравнений для определения коэффициентных функций b, r, p, $\bar p$, z из условий интегрируемости (1.2)-(1.9) и соотношений (4.4)-(4.6) аналогична схеме, изложенной в § 2. Имеем $\rho_2^0=D(r+\chi)$, $\chi_u=p_v$, $\chi_v=\bar p_u$, $\rho_1=r$ и

$$\rho_2=Au_1+Bv_1+R;\quad A=2(r_u+\bar p b)-p_v,\ B=\bar p_u-2r_v, \tag{4.7}$$

$$R=2z_{uv}+p\bar p+\tilde r,\ \tilde r_u=p r_v,\ \tilde r_v=\bar p r_u;$$

$$\rho_3=\tilde A u_1+\tilde B v_1+\tilde R+(bB-A_u)u_1^2+\mathrm{Im}\,D. \tag{4.8}$$

Сначала из равенства нулю коэффициента при $u_1 v_1$ в ρ_3^0 и условий (1.2), $k=1,2$ устанавливается, что

$$\bar p_v=0,\ r_{vv}=0,\ 2r_{uv}=\bar p_{uu}=p_{vv},\ r_{uv}(2r_v-\bar p_u)=0.$$

Затем, привлекая условие $\rho_4^0\in \mathrm{Im}\,D$, получаем из (1.2),(1.3) $k=1,2,3$

$$\bar p\in\mathbb{C},\ \bar p b_u=r_v=r_{uu}=z_{vvv}=p_{uv}=p_{vv}=0. \tag{4.9}$$

Теперь нетрудно убедиться, что случай $\bar p=0$ приводит к $z_{vv}=0$, т.е. распадению системы (4.2). Из (4.9) при $\bar p\neq 0$ следует, что $b=\mathrm{const}$.

Случай $r=0$ ($\bar p=b=1$). Равенство нулю свободного члена в ρ_4^0 дает

$$(p_u+4z_{vv})z_v=0. \tag{4.10}$$

Дальнейший анализ приводит к двум системам

$$u_t=u_2+v_1,\ v_t=-v_2+u_1^2+(v+\tfrac{1}{2}u^2)u_1, \tag{4.11}$$

$$u_t=u_2+v_1+\gamma,\ v_t=-v_2+u_1^2+\alpha u_1+\delta, \tag{4.12}$$

удовлетворяющим условиям (1.2)-(1.9). Заметим, что система (4.12) сводится к (2.17).

Случай $r=u$ ($\bar p=1$) приводит к системе уравнений

$$u_t=u_2+uu_1+v_1,\ v_t=-v_2+\beta u_1^2+uv_1-vu_1, \tag{4.13}$$

удовлетворяющей условиям (1.2),(1.3) при $k=1,2,3$. Однако в случае (4.13) нарушается условие (1.3) при $k=4$.

Системы вида (4.1) при $a\neq 0$ не приводят к новым интегрируемым случаям. Первые два условия дивергентности дают

$$a_v=a_u+a^2+b_v=0,\ p_{vv}-\bar p_{uu}+(a\bar p)_u=\bar q_u-q_v-a\bar q=0. \tag{4.14}$$

При этом

$$\rho_1^0=-au_1,\ \rho_2^0=D(r-au_1+\chi),\ \chi_u=p_v,\ \chi_v=\bar p_u-a\bar p.$$

Случаи $r\neq\mathrm{const}$ приводится к противоречию с условиями ρ_{1t}, ρ_3^0, $\rho_{2t}\in \mathrm{Im}\,D$. Используя преобразование Галилея полагаем в дальнейшем $r=0$.

Случай $b=0$. Из (4.14) следует, что $a_u+a^2=0$.

Удобно, используя замену вида (3.1), перейти от системы (4.1), (4.14) к системе вида

$$u_t=u_2+u_1^2+\bar p v_1+\bar q,\quad v_t=-v_2+2u_1v_1+pu_1-q; \tag{4.15}$$

$$p_{vv}=\bar p_{uu},\ \bar q_u=q_v;\ \rho_1^0=0,\ \rho_2^0=D(\chi),\ \chi_u=p_v,\ \chi_v=\bar p_u.$$

Условие $\rho_3^0\in \operatorname{Im} D$ дает $\bar p\in \mathbb{C}$,

$$p_{uv}-p_v=p_v\bar q+2p\,\bar q_v-2\bar p q_u=\bar p\, p_{uv}-4\bar q_{uv}. \tag{4.16}$$

Из (4.15), (4.16), (4.5) и условий ρ_{2t}, $\rho_{3t}\in \operatorname{Im} D$ находим, что

$$\rho_2=D(2u_1+4v\bar p-p_v),\ \rho_3=\bar p(8u_1v_1+4pu_1-p_v u_1-4q)-\bar q p_v+\operatorname{Im} D,\ \bar p\neq 0;\ p,q,\bar q-\mathrm{const}.$$

Получена система

$$u_t=u_2+u_1^2+v_1+\alpha,\quad v_t=-v_2+2u_1v_1+\beta u_1+\gamma, \tag{4.17}$$

сводящаяся к (2.25).

Случай a, $b\neq 0$. Из (4.4), (4.5), (4.14) и условий ρ_3^0, $\rho_{2t}\in \operatorname{Im} D$ следует, что $\rho_2=D(\chi-2\hat p)+p\bar p+2\bar q_u\in \operatorname{Im} D+\mathbb{C}$, $\hat p_u=b\bar p$, $\hat p_v=a\bar p+\bar p_u$.

Равенства нулю коэффициентов при u_1^2 в ρ_3^0 и ρ_3 дают $\bar p=0$, равенства нулю свободного члена в ρ_3^0 и коэффициента при u_1v_1 в ρ_{3t} дают $p=0$.

Теперь имеем

$$\bar q_u=\alpha\in \mathbb{C},\ b\bar q_{vv}=[2a_u+a^2]\bar q_v,\ \rho_3^0=D(\varphi_t+4Q), \tag{4.18}$$

где $\varphi_u=-a$, $\varphi_v=0$, $Q_u=b\bar q_v$, $Q_v=a\bar q_v$.

Равенство нулю коэффициента при u_2^2 в ρ_4^0 и (4.14) дают $b_v=a_u+a^2$. Противоречие получается в результате сравнения (4.18) с коэффициентом при v_1^2 в ρ_4^0.

§ 5. Системы общего вида

В общем случае квадратичной зависимости правой части (1.1) по u_1, v_1:

$$f=\tfrac12 f_{u_1u_1}u_1^2+f_{u_1v_1}u_1v_1+\tfrac12 f_{v_1v_1}v_1^2+f_1u_1+f_2v_1+f_0,$$

$$g=\tfrac12 g_{u_1u_1}u_1^2+g_{u_1v_1}u_1v_1+\tfrac12 g_{v_1v_1}v_1^2+g_1u_1+g_2v_1+g_0, \tag{5.1}$$

плотности (1.4), если система удовлетворяет условиям интегрируемости, имеют (см. [2]) следующий вид

$$\rho_1^0=D(\varphi),\quad \rho_1=\psi_u u_1-\psi_v v_1+\tau, \tag{5.2}$$

где $\varphi\equiv\varphi_1$, ψ, τ – функции от (u,v).

Лемма. Пусть плотности (5.2) удовлетворяют условиям

$$\psi_{uv}=0,\quad (\varphi-\psi)_u(\varphi-\psi)_v=0. \tag{5.3}$$

Тогда система (1.1), (5.1) сводится преобразованием вида (3.1) к случаям, рассмотренным в §§ 2,3,4.

Доказательство. Из формул (1.4) для плотностей (5.2) следует, что

$$f_{u_1u_1}=(\varphi+\psi)_u,\ g_{v_1v_1}=(\varphi+\psi)_v,\ f_{u_1v_1}=(\varphi-\psi)_v,\ g_{u_1v_1}=(\varphi-\psi)_u,\ f_1=-g_2=\tau. \tag{5.4}$$

Из (5.3),(5.4) получаем

$$(f_{u_1v_1})_u=(f_{u_1u_1})_v=(g_{u_1v_1})_v=(g_{v_1v_1})_u=0$$

Замена (3.1) при $u''/u'=f_{u_1u_1}$, $v''/v'=g_{v_1v_1}$ приводит систему (1.1) к виду, в котором $f_{u_1u_1}=g_{v_1v_1}=0$. Так случай $f_{v_1v_1}g_{u_1u_1}\neq 0$ рассмотрен в § 3 (ср. теорему 4 в [2]) можно считать, что $f_{v_1v_1}=0$ и что система имеет вид

$$u_t=u_2+2\bar a(v)u_1v_1+r u_1+\bar p v_1+\bar q,$$
$$v_t=-v_2+2a(u)u_1v_1+bu_1^2+rv_1+pu_1-q. \tag{5.5}$$

В случае (5.5) равенство нулю коэффициентов при u_1^2 в ρ_2^0 и ρ_2 дает соответственно

$$a'+a^2+b_v+\bar a b=0,\quad a'+a^2+b_v-5\bar a b. \tag{5.6}$$

Случай $\bar a=0$ рассмотрен в §§ 2,4. При $\bar a\neq 0$ из (5.6),(5.3) следует $b=0$, $a=0$, что приводит к случаю

$$f_{u_1u_1}=g_{v_1v_1}=f_{v_1v_1}=g_{u_1u_1}=f_{u_1v_1}=g_{u_1v_1}=0. \tag{5.7}$$

Этот случай (5.7) сводится к рассмотренному в § 4 переобозначением $v\Leftrightarrow u$. Теорема доказана.

В работе [2] (теорема 2) было показано, что

$$|f_{v_1v_1}|+|g_{u_1u_1}|\neq 0 \Longrightarrow (5.3)$$

Поэтому из леммы и соотношений (5.4) следует, что при рассмотрении общего случая (5.1) можно ограничиться системами вида

$$u_t=u_2+\frac12(\varphi+\psi)_u u_1^2+(\varphi-\psi)_v u_1v_1+ru_1+\bar p v_1+\bar q,$$
$$-v_t=v_2+\frac12(\varphi+\psi)_v v_1^2+(\varphi-\psi)_u u_1v_1-rv_1-pu_1+q, \tag{5.7}$$

для которых

$$|\psi_{uv}|+|(\varphi-\psi)_u(\varphi-\psi)_v|\neq 0 \tag{5.8}$$

Из формул (5.2),(4.4),(4.5) следует, что для системы (5.7) условия ρ_{1t}, $\rho_2^0\in \mathrm{Im}\,D$ эквивалентны следующим соотношениям:

$$2\psi_{uvu}=\psi_{uv}(3\varphi-\psi)_u,\quad 2\psi_{uvv}=\psi_{uv}(3\varphi-\psi)_v, \tag{5.9}$$

$$r_u(\varphi-\psi)_v=r_v(\varphi-\psi)_u,\quad r_u\bar q=r_v q, \tag{5.10}$$

$$2r_{uu}=4\psi_{uv}p+r_u(\varphi+\psi)_u,\quad 2r_{vv}=4\psi_{uv}\bar p+r_v(\varphi+\psi)_v \tag{5.11}$$

$$(r_v p-2\psi_{uv}q)_v=(r_u\bar p-2\psi_{uv}\bar q)_u, \tag{5.12}$$

$$(\varphi-\psi)_{uu}=\varphi_u(\varphi-\psi)_u,\quad (\varphi-\psi)_{vv}=\varphi_v(\varphi-\psi)_v, \tag{5.13}$$

$$\bar q_u+\varphi_u\bar q=q_v+\varphi_v q,\quad (p_v+\varphi_v p)_v=(\bar p_u+\varphi_u\bar p)_u. \tag{5.14}$$

При этом, в силу (5.13),(5.14)

$$\rho_2^0=D(\varphi_u u_1-\varphi_v v_1+r+\chi), \tag{5.15}$$
$$\chi_u=p_v+\varphi_v p,\quad \chi_v=\bar p_u+\varphi_u\bar p.$$

Система уравнений (5.9)-(5.14) является незамкнутой. Как показано в работе [2] для полного определения вида интегрируемой системы (5.7) достаточно условий ρ_{2t}, $\rho_{3t}\in \mathrm{Im}\,D$. Исключением является случай

$$(\varphi-3\psi)_{uv}-(\varphi-\psi)_u(\varphi-\psi)_v=0, \qquad (5.16)$$

соответствующий вырождению плотностей (1.7). Из (5.8), (5.16) следует, что достаточно рассмотреть два варианта:

$$(\varphi-\psi)_u(\varphi-\psi)_v\neq 0,\ \psi_{uv}\neq 0, \qquad (5.17)$$

$$(\varphi-\psi)_u(\varphi-\psi)_v\neq 0,\ \psi_{uv}=0. \qquad (5.18)$$

Третий случай $(\psi-\varphi)_u(\psi-\varphi)_v=0$, $\psi_{uv}\neq 0$ противоречит (5.16).

Теорема. Система (5.7), удовлетворяющая условиям (5.9)-(5.14), в случае (5.16),(5.17) инвариантна относительно однопараметрической группы преобразований и сводится к виду (2.1) заменой

$$\bar u_1=g u_1+h,\quad \bar v_1=\bar g v_1+\bar h.$$

Группа преобразований и вид зависимости функций g, $\bar g$, h, $\bar h$ от u, v уточняется ниже.

Доказательство. В силу (5.13),(5.17) существует система координат (3.1) в которой главная часть (5.7) инвариантна относительно группы сдвигов $u\to u+\tau$, $v\to v-\tau$. В этой системе координат имеем (ср. 2)

$$\varphi=\ln g(1+\delta g),\ \psi=\ln g^{-1}(1+\delta g),\ \delta\in C,$$
$$g=g(u+v),\ 2g'=g^2(1+\delta g). \qquad (5.19)$$

Соотношения (5.19) гарантируют выполнение условий (5.9),(5.13),(5.16). Из (5.17),(5.10) находим $r_u=r_v$,

из (5.11) - $\bar p=p=p(u+v)$. Из (5.12),(5.14) имеем

$$(\ln\psi'')'(\bar q-q)+(\bar q_u-q_v)=0,\ \varphi'(\bar q-q)+\bar q_u-\bar q_v=0.$$

Тк как $(\ln\psi'')'-\varphi'=(\ln g)'\neq 0$, то $\bar q=q=q(u+v)$.

Таким образом коэффициенты рассматриваемой системы уравнений (5.7),(5.19) зависят только от $u+v$ и допустима замена

$$\bar u+\bar v=2\ln[g(1+\delta g)^{-1}],\ \bar u_1=gu_1+h,\ \bar v_1=gv_1-h,\ h=h(u+v),\ h''=\tfrac{1}{2}\delta g^2h'+pg'. \qquad (5.20)$$

Выразив u_1, v_1 через $\bar u+\bar v$, $\bar u_1$, $\bar v_1$ находим прямой подстановкой, что замена (5.20) переводит рассматриваемую систему (5.7),(5.19) в систему $\bar u_t=\bar u_2-\frac{1}{2}\bar u_1^2+a\bar u_1+b\bar v_1+c$, $\bar v_t=-\bar v_2+\frac{1}{2}\bar v_1^2+a\bar v_1+b\bar u_1-c$, эквивалентную (1.1),(2.1). Теорема доказана.

В случае (5.16),(5.18) система координат (3.1) выбирается так, чтобы

$$\psi=0,\ \varphi=\varphi(u+v),\ \varphi_u=\varphi_v=e^{\varphi}. \qquad (5.21)$$

Если рассматриваемая система (5.7),(5.21) инвариантна относительно группы сдвигов, то она, как и выше, сводится к случаю (2.1) заменой

$$\bar u+\bar v=-1/2g,\ \bar u_1=gu_1+h,\ \bar v_1=gv_1-h, \qquad (5.22)$$
$$g=-\tfrac{1}{2}e^{\varphi/2},\ h=h(u+v),\ h''=2g^2h'+8g^5p.$$

Таким образом остается рассмотреть системы (5.7), (5.21) не инвариантные при сдвигах $u\to u+\tau$, $v\to v-\tau$.

Из (5.18),(5.10) следует, что $\tau_u = \tau_v$. Из условия $\rho_3^0 \in \mathrm{Im}\, D$ находим в дополнение к (5.14),(5.15), что $\chi = \chi(u+v)$ и

$$2p_u + e^{\varphi} p = 2\bar{p}_v + e^{\varphi}\bar{p} = 2(\tau + \tfrac{1}{2}\chi)'' e^{-\varphi} - (\tau + \tfrac{1}{2}\chi)', \qquad (5.23)$$

$$\partial^2(q e^{\varphi})/\partial u \partial v = \partial^2(\bar{q} e^{\varphi})/\partial u \partial v. \qquad (5.24)$$

Первое из этих соотношений и (5.14) приводят к $\bar{p} = p = p(u+v)$. Если $\bar{q} = q$, то из (5.14) следует, что $q_u = q$. Поэтому $\bar{q} \neq q$, что означает, в силу (5.10), $\tau \in \mathbb{C}$ или, эквивалентно, $\tau = 0$. При этом уравнение (5.23) дает $p = \alpha e^{\varphi} + \beta e^{-\varphi/2}$. Дальнейший анализ условия $\rho_{2t} \in \mathrm{Im}\, D$ показывает, что $\beta = 0$,

$$\rho_2 = p^2 + \bar{q}_u + q_v = \mathrm{const}$$

и, что функции $q_1 = q e^{\varphi}$, $\bar{q}_1 = \bar{q} e^{\varphi}$ удовлетворяют уравнению $(q_1)_u = (\bar{q}_1)_v$. Учитывая (5.14) и (5.24) находим вид системы (5.7),(5.21), удовлетворяющей условиям (1.2),(1.3) при $k = 1,2,3$ и не инвариантной при сдвигах:

$$\begin{aligned} u_t &= u_2 + (\tfrac{1}{2}u_1^2 + u_1 v_1 + \alpha v_1)e^{\varphi} + [\gamma(u-v) + \beta_1]e^{-\varphi} + R, \\ -v_t &= v_2 + (\tfrac{1}{2}v_1^2 + u_1 v_1 - \alpha u_1)e^{\varphi} - \\ &\quad - [\gamma(u-v) + \beta_2]e^{-\varphi} + R, \end{aligned} \qquad (5.25)$$

$$R = \tfrac{1}{2}(\gamma e^{-2\varphi} - \alpha^2 e^{\varphi}); \quad \alpha, \gamma, \beta \in \mathbb{C}.$$

Необходимость указанного выше модуля замен становится ясной, если найти вид интегрируемых уравнений из § 2 после замен, обратных к (5.20),(5.22). Аналогичные замены использовались в работе [2] , однако их значение в задаче о полном списке интегрируемых систем вида (1.1) было осознано позднее. Заметную роль в обсуждении вопросов, связанных с заменами типа (5.20), сыграл соавтор работ [1,2] А.В.Михайлов.

Список интегрируемых уравнений (1.1) полиномиальных по u_1, v_1 становится полным, если к уравнениям, рассмотренным в данном препринте: (2.14)-(2.26),(3.9)-(3.14), (4.11);(4.12),(4.17),(5.25), добавить опубликованные в [2] списки уравнений, содержащих кубические по , члены, и уравнений вида (5.7), удовлетворяющих условию невырожденности плотностей (1.7) (левая часть в (5.16) не равна нулю).

Цитированная литература

1. Михайлов А.В., Шабат А.Б. Условия инегрируемости систем двух уравнений вида $u_t = A(u)u_{xx} + F(u, u_x)$. I , ТМФ, 1985, т.62, № 2,163-185.
2. Михайлов А.В., Шабат А.Б. Условия интегрируемости систем двух уравнений вида $u_t = A(u)u_{xx} + F(u, u_x)$. II , Препринт ИТФ им.Л.Д.Ландау, Черноголовка, 1985,

(направлено в ТМФ).

3. Жарков А.Ю., Свинолупов С.И., Шварка А.Б. Исследование интегрируемости нелинейных эволюционных уравнений с использованием систем аналитических вычислений на ЭВМ, Препринт ОИЯИ, Р11-84-346, Дубна, 1984.

4. Гердт В.П., Жарков А.Ю., Шварка А.Б. - программа исследования интегрируемости нелинейных эволюционных уравнений. В кн.: Системы для аналитических преобразований в механике. Издательство Горьковского гос. университета. Горький, 1984, с.115.

5. Sokolov V.V., Shabat A.B. Classification of integrable evolution equations, Soviet Sci. Rev. C., 1984, 4, 221-280.

Подписано к печати I.I0.85. П00204. Тир.I50. Зак.№ 161
РТП БФАН СССР. Уфа,54,пр.Октября,7I. I985.