АКАДЕМИЯ НАУК СССР
БАШКИРСКИЙ ФИЛИАЛ
Отдел физики и математики

А.Б.Шабат

УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Препринт доклада
Президиуму Башкирского филиала АН СССР

УФА 1983

В Отделе физики и математики БФАН СССР в последние годы ведется интенсивная работа по выработке критериев интегрируемости нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными и применения этих критериев для перечисления всех интегрируемых уравнений заданного достаточно общего вида. В докладе формулируются основные результаты полученные в этом направлении.

Нелинейный аналог преобразования Фурье, так называемый метод обратной задачи рассеяния, основан, как известно, на понятии $L-A$ пары. Следующее определение (ср. [I]) является одним из вариантов строгой формулировки этого понятия.

Пусть $t, x, u, u_1, u_2, \ldots$ – бесконечный набор независимых переменных. Обозначим через $\mathcal{A}$ алгебру аналитических функций, зависящих от конечного числа переменных из этого набора. Скалярное эволюционное уравнение

$$u_t = F(t, x, u, u_x, u_{xx}, \ldots) \tag{I}$$

называется ф о р м а л ь н о и н т е г р и р у е м ы м, если существует ряд

$$L = a_{-1} D + a_0 + a_1 D^{-1} + a_2 D^{-2} + \ldots \tag{2}$$

с коэффициентами $a_i \in \mathcal{A}$, удовлетворяющий коммутационному соотношению

$$\left[\frac{d}{dt} - F_*, \ L \right] = 0 \tag{3}$$

Здесь D и d/dt – дифференцирования в алгебре $\mathcal{A}$:

$$D = \partial/\partial x + u_1 \partial/\partial u + u_2 \partial/\partial u_1 + u_3 \partial/\partial u_2 + \ldots$$

$$d/dt = \partial/\partial t + F\,\partial/\partial u + D(F)\,\partial/\partial u_1 + D^2(F)\,\partial/\partial u_2 + \dots$$

и для любой функции $f \in \mathcal{A}$

$$f_* \overset{\text{опр}}{=} \partial f/\partial u + \partial f/\partial u_1 D + \partial f/\partial u_2 D^2 + \dots$$

Операция умножения F_* и L в (3) определяется формулой Лейбница

$$D^n \circ a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} D^k(a)\, D^{n-k}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

В силу (3) формально интегрируемое уравнение (I) обладает серией локальных законов сохранения с плотностями

$$\rho_{-1} = \operatorname{res}(L^{-1}),\ \ \rho_0 = \operatorname{res}(L^{-1}L_t),\ \ \rho_k = \operatorname{res}(L^k),$$
$$k = 1, 2, 3, \dots; \quad \operatorname{res}\Big(\sum_{k=n}^{\infty} \ell_k D^{-k}\Big) \overset{\text{опр}}{=} \ell_1. \tag{4}$$

Хотя формальная интегрируемость означает существование бесконечной серии законов сохранения с плотностями (4), приведенные ниже утверждения показывают, что требование существования нескольких первых законов сохранения с плотностями $\rho_{-1}, \rho_0, \rho_1, \dots$ полностью определяет класс формально интегрируемых уравнений.

В случае, когда правая часть F уравнения (I) не зависит от t, x, естественно рассматривать задачу об определении ряда (2) с коэффициентами $a_k \in \mathcal{F}$, где $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ – алгебра функций переменных $u, u_1, u_2, \dots$ При этом формула $\mathbb{L} = \sum_{k=-\infty}^{n} c_k L^k$, $c_k \in \mathbb{C}$ дает общее решение уравнения (3) и коэффициенты ряда (2) определяются однозначно с точностью до младших членов. Коэффициент a_{-1}

для уравнения (I) порядка m равен $\mathrm{const}\,(\partial F/\partial u_m)^{1/m}$
Так как $\operatorname{res}(L^{-1}) = \mathrm{const}\,(\partial F/\partial u_m)^{-1/m}$, перв
закон сохранения с плотностью ρ_{-1} дает

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial u_m}\right)^{-1/m}\right] = D(g), \quad g \in \mathfrak{F}$$

Это соотношение позволяет найти характер зависимости $F(u,\dots,u_m)$ от u_m при $m \geqslant 2$. Следующие законы сохранения позволяют уточнить вид правой части формально интегрируемого нелинейного уравнения.

Т е о р е м а I (В.В.Соколов, С.И.Свинолупов [2]). Нелинейное уравнение $u_t = u_3 + f(u,u_1,u_2)$ обладает законами сохранения с плотностями $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда это уравнение, либо сводится к линейному уравнению $v_t = v_3$ (заменой аналогичной замене, переводящей уравнение Бюргерса $u_t = u_2 + uu_1$ в линейное уравне ие $v_t = v_2$), либо сводится к уравнению Кортевега-де Фриза $v_t = v_3 + vv_1$ заменой вида $v = \varphi(u,u_1,u_2)$, либо эквивалентно уравнению (см.[3]):

$$u_t = u_3 - \frac{3}{2}\frac{u_2^2}{u_1} + \frac{u^4 + \alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta}{u_1}, \qquad (5)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, с точностью до замены $u' = \varphi(u)$.

Приведем, в дополнение к теореме, список уравнений сводящихся к уравнению Кортевега-де Фриза. Этот список состоит из трех основных уравнений (см.[4]):

$$u_t = u_3 + (\alpha u^2 + \beta u + \gamma)u_1 \qquad (6)$$

$$u_t = u_3 - \frac{1}{8}u_1^3 + (\alpha e^u + \beta e^{-u})u_1 \qquad (7)$$

$$u_t = u_3 - \frac{3}{2}\,\frac{u_1 u_2^2}{u_1^2+1} - \frac{3}{2}\wp(u)\left(u_1^3 + u_1\right) \qquad (8)$$

где $(\wp')^2 = 4\wp^3 + \alpha\wp + \beta$, и следующих модификаций уравнений (6) и (7):

$$v_t = v_3 + \alpha v_1^3 + \beta v_1^2 \qquad (6)'$$

$$v_t = v_3 - \frac{3}{4}\,\frac{v_2^2}{v_1} + \alpha v_1^{3/2} + \beta v_1^2 \qquad (6)''$$

$$v_t = v_3 - \frac{3}{2}\,\frac{v_2^2}{v_1} + \alpha v_1^{-1} + \beta v_1^3 \qquad (7)'$$

$$v_t = v_3 - \frac{3}{2}\,\frac{v_1 v_2^2}{v_1^2+1} + \alpha\left(v_1^2+1\right)^{3/2} + \beta v_1^3 \qquad (7)''$$

Указанные уравнения, вместе с уравнением (5), дают полный, с точностью до замен $u' = \varphi(t,x,u)$, список уравнений, обладающих законами сохранения с плотностями $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3$, и не сводящихся к линейным уравнениям. Модифицированные уравнения $(6)'$-$(7)''$ получаются из основных (6), (7) в результате замен вида $u = \varphi(v_1)$. Все перечисленные уравнения не только формально интегрируемы, но и обладают симметриями и законами сохранения сколь угодно большого порядка.

Интересно отметить, что в силу работы [6], любое формальное интегрируемое уравнение вида $u_t = g(u)u_3 + h(u,u_1,u_2)$ сводится к одному из уравнений $(6)'$-$(7)''$ преобразованием типа Лежандра. Доказательство этого утверждения использует только теорему I и первое из условий формальной интегрируемости - закон сохранения с плотностью ρ_0.

Четыре условия формальной интегрируемости из теоремы I заведомо выполняются, если уравнение обладает симметрией или двумя законами сохранения достаточно высоких порядков. Однако трудно представить себе доказательство теоремы I и ей аналогичных, не использующее в том или ином виде законов сохранения с плотностями (4).

Теорема 2. (Р.И.Ямилов [6]). Дискретная система

$$u_t = F(u_{-1}, u, u_1) \qquad \left(\frac{du_k}{dt} = F(u_{k-1}, u_k, u_{k+1}),\ k \in \mathbb{Z}\right)$$

обладает двумя локальными законами сохранения достаточно большого порядка в том и только в том случае, если она эквивалентна с точностью до замены $u' = \varphi(u)$ одной из систем следующего списка, состоящего из четырех основных уравнений:

$$u_t = P(u)\,(u_1 - u_{-1}), \tag{9}$$

$$u_t = P(u^2)\left[(u_1+u)^{-1} - (u+u_{-1})^{-1}\right], \tag{10}$$

$$u_t = Q(u)\left[(u_1-u)^{-1} + (u-u_{-1})^{-1}\right], \tag{11}$$

$$u_t = (u_1-u_{-1})^{-1}\left[R(u_{-1},u,u_1) + \alpha\sqrt{R(u_{-1},u,u_{-1})R(u_1,u,u_1)}\right], \tag{12}$$

$$\alpha = 0, \pm 1, \quad R(u_{-1},u,u_1) = (u_1-u)(u_{-1}-u)\left(\beta + \tfrac{1}{12}Q''(u)\right) +$$

$$+ (u_1 - 2u + u_{-1})\,\tfrac{1}{4}Q'(u) + Q(u),$$

где P и Q - произвольные полиномы второй и четвертой степени, соответственно, и модификаций уравнений (9), (10), (11):

$$v_t = \varphi(v_1 - v) + \varphi(v - v_{-1}), \qquad \varphi' = P(\varphi) \tag{9$'$}$$

$$v_t = \varphi(v_1 - v)\varphi(v - v_{-1}) + \alpha , \quad \varphi' = \varphi^{-1} P(\varphi) \tag{9}''$$

$$v_t = \left[\varphi(v_1 - v) + \varphi(v - v_{-1})\right]^{-1} + \alpha , \quad \varphi' = P(\varphi^2) \tag{10}'$$

$$v_t = \frac{\varphi(v_1 + v) - \varphi(v + v_{-1})}{\varphi(v_1 + v) + \varphi(v + v_{-1})} , \quad \varphi' = \varphi^{-1} P(\varphi^2) \tag{10}''$$

$$v_t = \frac{\left[1 - \varphi(v_1 - v)\right]\left[1 - \varphi(v - v_{-1})\right]}{\varphi(v_1 - v) + \varphi(v - v_{-1})} + \alpha , \quad \varphi' = \frac{P(\varphi^2)}{1 - \varphi^2} \tag{10}'''$$

$$v_t = \left[\varphi(v_1 + v) - \varphi(v + v_{-1})\right]^{-1} , \quad \varphi' = Q(\varphi) \tag{11}'$$

$$v_t = \frac{\varphi(v_1 + v) + \varphi(v + v_{-1})}{\varphi(v_1 + v) - \varphi(v + v_{-1})} , \quad \varphi' = \varphi^{-1} Q(\varphi) \tag{11}''$$

Доказательство довольно трудной теоремы 2 основано на трех условиях интегрируемости аналогичных условиям теоремы I. Все перечисленные дискретные системы обладают симметриями и законами сохранения сколь угодно большого порядка. Модифицированные уравнения сводятся к уравнениям основного списка заменами

$u = \varphi(v_1 - v)$ или $u = \varphi(v_1 + v)$.

Известно, что уравнение $u_t = u(u_1 - u_{-1})$ в континуальном пределе переходит в уравнение Кортевега-де Фриза. Аналогичный предельный переход переводит дискретные уравнения (9) и (I0) в дифференциальные уравнения (6) и (7), соответственно. Уравнение (I2) при $\alpha = 0$ является разностной аппроксимацией, выделенного в теореме I, дифференциального уравнения (5). Это свидетельствует о глубокой связи между дифференциальными и дискретными интегрируемыми уравнениями.

Класс формально интегрируемых уравнений не исчерпывается уравнениями, интегрируемыми методом обратной задачи рассеяния. Очевидным примером являются линейные и сводящиеся к ним нелинейные уравнения. Заметим, что линейные уравнения с переменными коэффициентами формально интегрируемы, но, вообще говоря, не имеют нетривиальных симметрий и законов сохранения. По-видимому, в скалярном случае любое формально интегрируемое уравнение, либо интегрируется методом обратной задачи рассеяния, либо сводится к линейному. Интересные примеры формально интегрируемых уравнений возникают, если перейти от скалярного уравнения (I) к системе эволюционных уравнений вида (I), где $u \in \mathbb{C}^N$, $N \geq 2$.

В определение формальной интегрируемости, при переходе к эволюционной системе (I) размерности $N \geq 2$, вносится требование существования набора операторов вида (2) с N линейно независимыми над полем $\mathbb{C}$ матричными коэффициентами a_{-1} .

Т е о р е м а 3. (А.В.Жибер, А.Б.Шабат [7]). Рассмотрим гиперболическую систему уравнений

$$u_t - u_x = f(u,v), \quad v_t + v_x = g(u,v)$$

Пусть $\partial f/\partial v$, $\partial g/\partial u \neq 0$. Тогда система удовлетворяет первым трем условиям формальной интегрируемости в том и только в том случае, если она эквивалентна, с точностью до замены $u' = \varphi(u)$, $v' = \psi(v)$ одной из следующих семи систем:

$$u_t - u_x = v, \qquad v_t + v_x = \sin u ; \tag{I3}$$

$$u_t - u_x = v, \qquad v_t + v_x = e^{u} + e^{-2u}; \tag{I4}$$

$$u_t - u_x = \sin v, \quad v_t + v_x = \sin u ; \tag{I5}$$

$$u_t - u_x = e^{v}, \qquad v_t + v_x = h(u); \tag{16}$$

$$u_t - u_x = v^{-1}, \qquad v_t + v_x = uv + 1; \tag{17}$$

$$u_t - u_x = uv + 1, \qquad v_t + v_x = vu + 1; \tag{18}$$

$$u_t - u_x = v, \qquad v_t + v_x = ve^{u} + e^{2u} \tag{19}$$

Этот список является обобщением, полученного еще в 1979 году, полного списка формально интегрируемых уравнений вида $u_{tt} - u_{xx} = F(u)$ и системы (13), (14) эквивалентны известным уравнениям. Для интегрирования системы (15) также как, например, в случае уравнения $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$ можно воспользоваться обратной задачей рассеяния для оператора L, входящего в $L-A$ пару симметрии минимального порядка. Для (15) эта симметрия приводит к известному уравнению (7) из теоремы I.

Система (16) формально интегрируема при произвольной функции $h(u)$, однако нетривиальные симметрии существуют лишь при $h''/h = \text{const}$. В этом случае существует преобразование

$$u' = u'(u, v, u_t, v_t, u_x, v_x, \ldots), \quad v' = v'(u, v, u_t, v_t, u_x, v_x, \ldots) \tag{20}$$

переводящее систему (16) в свободную систему

$$u'_t - u'_x = 0, \qquad v'_t + v'_x = 0$$

Частный случай $h(u) = u$ соответствует уравнению Лиувилля. Система (17) также сводится к свободной системе преобразованием вида (20).

Система (I8) сводится к линейному уравнению $u_{tt} - u_{xx} = u$

Система (I9), по-видимому, не сводится к линейной и не интегрируется методом обратной задачи рассеяния.

Число условий необходимых для полного описания формально интегрируемых систем растет пропорционально размерности N системы (в теореме 3 число скалярных условий равно $3 \times N = 6$). Поэтому в больших размерностях трудно надеяться на успех при непосредственном применении условий формальной интегрируемости и главной задачей теории интегрируемых систем является выяснение связи интегрируемости с известными результатами о классификации конечномерных и бесконечномерных градуированных алгебр Ли. О[дн]им из результатов в этом направлении является .

Т е о р е м а 4 (см. [8]). Экспоненциальная система уравнений

$$u^i_{tt} - u^i_{xx} = \sum_{k=1}^{N} a^i_k \exp(u^k), \quad i = 1, \dots, N$$

с невырожденной матрицей (a^i_k) допускает преобразование вида (20) в свободную систему в том и только в том случае, когда (a^i_k) - матрица Картана полупростой алгебры Ли.

Определенные надежды связаны с применением ЭВМ. В результате сотрудничества с ОИЯИ (г.Дубна) создана программа для проверки на машине условий формальной интегрируемости для фиксированного скалярного уравнения (I). Для уравнения $u_t = u_5 + uu_1$ счет приводит к следующему результату: законы сохранения с плотностями (4) выполняются только при $k < 8$. Это означает, что вопреки гипотезе работы [9], указанное уравнение не является формально интегрируемым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. О бесконечных алгебрах Ли-Беклунда. - Функц.анализ и его прилож., 1980, 14, вып.4, с.79-80.
2. Соколов В.В., Свинолупов С.И. Об эволюционных уравнениях с нетривиальными законами сохранения. - Функц.анализ и его прилож., 1982, 16, вып.4, с.86-87; Соколов В.В., Свинолупов С.И., Ямилов Р.И. О преобразованиях Беклунда для интегрируемых эволюционных уравнений. - Докл.АН СССР, 1983, 271, № 4.
3. Кричевер И.М., Новиков С.П. Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения. - УМН, 1980, 35, вып.6, с.47-68.
4. Calogero F., Degasperis A. Reduction technique for matrix nonlinear evolution equations solvable by the spectral transform. - Roma, 1979. / Preprint Instituto di Fisica; Univ. di Roma - n° 151/.
5. Свинолупов С.И. Список формально интегрируемых уравнений вида $u_t = f(u)u_3 + h(x,u_1,u_2)$. - Деп.ВИНИТИ № 2962-83, 1983, 6 с.
6. Ямилов Р.И. О классификации дискретных уравнений. - В кн.: Интегрируемые системы. Уфа: БФАН СССР, 1982, с.95-114.
7. Жибер А.В., Шабат А.Б. Уравнения Клейна-Гордона с нетривиальной группой. - Докл.АН СССР, 1979, 247, № 5, с.1104-1107; Системы уравнений $u_x = p(u,v)$, $v_y = q(u,v)$ обладающие симметриями. - Докл.АН СССР, 1983 (в печати).
8. Лезнов А.Н., Смирнов В.Г., Шабат А.Б. Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем. - ТМФ, 1982, 51, вып.1., с.10-22; Шабат А.Б., Ямилов Р.И. Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана. - Уфа, 1981. - 22 с. - (препринт БФАН СССР. Отдел физики и математики).
9. Abellanas L., Galindo A. J. of Math. Ph., 1983, 24, № 3.