Карачаевские лекции

А.Шабат

лето 2017

Аннотация

Обсуждается взаимосвязь инвриантов, первых интегралов и законов сохранения для интегрируемых систем. Рассматривается модификации симметрических многочленов из теории непрерывных дробей и их обобщения связанные с формулой Фаа ди Бруно для производных сложных функций. Излагаются азы симметрийной классификации интегрируемух систем, теории коммутативных колец дифференциальных операторов основанной на теореме И.Шура и техники связанной с парами Лакса.

Предисловие. Уравнения Вольтерры

$$\dot{u}_n = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) \tag{1}$$

и сязанная с ними цепочка уравнений Дарбу:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\log w_n) = w_{n+2} + w_{n-2} - 2w_n, \quad w_n \overset{\text{def}}{=} u_n u_{n+1} \tag{2}$$

являются моделями в современной теории интегрируемости и имеют много приложений. В случае (2) например, данная цепочка является одним из решений так называемой задачи М.Тода, об условиях существования дополнительных законов сохранения для уравнений

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = f(u_{n+1} - u_n) - f(u_n - u_{n-1}),$$

описывающих продольные колебаниях системы шариков, соединённых пружинами. Вообще говоря уравнения (1) и (2) определяют "динамику" по непрерывной переменной $t \in \mathbb{R}$ бесконечного набора переменных $u_j,\ w_j,\ j \in \mathbb{Z}$. Мы называем их бесконечномерными динамическими системами и интересуемся их законами сохранения, обобщающими первые интегралы их конечномерных редукций. Аналогичные задачи в случае функций $u(n) = u(n, x, y),\ n \in \mathbb{Z}$, от двух непрерывных и одной дискретной переменных, также будут обсуждаться ниже, включая, начала теории интегрируемости так называемой, двумерной цепочки Тоды:

$$[\log u(n)]_{xy} = u(n+1) + u(n-1) - 2u(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Исторически рассматриваемые уравнения возникли в работах геометров 19го века и в особенности в работах Огюстена Дарбу (1842-1917). Однако, мы при выводе одномерной цепочки Тоды (2) (Лекции 2 и 3) используем аналитический аппарат непрерывных дробей, а при выводе (3) обсуждаем связи её "первых интегралов"с многочленами Шура из формулы Фаа ди Бруно для дифференцирования сложных функций.

ЛЕКЦИЯ 1: Непрерывные дроби.

Для вывода законов сохранения дифференциальных уравнений, связанных с цепочеками (1) и (2), нам понадобится обобщение следующей простой формулы:

$$B_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \operatorname{tr} B_2B_1B_0 = a_2a_1a_0 + a_2b_1c_0 + a_1b_0c_2 + a_0b_2c_1 \tag{4}$$

на случай произведения большого числа этих матриц. Такие формулы для следов произведений матриц и соответствующих однородных многочленов играют заметную роль в разнообразных задачах математической физики[1].

Теорема 1. При любом $m \geq 1$ след произведения матриц B_n выражается следующей формулой, содержащей коммутирующие друг с другом операторы дифференцирования ∂_j по независимым переменным $a_j,\ j = 0, \ldots, m$:

$$\operatorname{tr} B_m \cdots B_0 = \prod_{k=0}^{m} \Delta_k \left(\prod_{j=0}^{m} a_j \right), \quad \Delta_k = I + b_k c_{k-1} \partial_k \partial_{k-1},\ k \geq 1, \quad \Delta_0 \stackrel{\text{def}}{=} I + b_0 c_m \partial_0 \partial_m. \tag{5}$$

Теорема сводит рассматриваемую задачу к перечислительной математике и в случае $m = 3$ формула (5) даёт, например:

$$a_3a_2a_1a_0 \mapsto a_3a_2a_1a_0 + a_3a_2b_1c_0 + \cdots + b_3b_1c_2c_0 + b_2b_0c_3c_1.$$

Для доказательства формулы (5) мы используем итерации рекурсионного соотношения второго порядка:

$$\psi_{n+1} = \alpha_{n+1}\psi_n + \beta_{n+1}\psi_{n-1}. \tag{6}$$

Отметим, что этим итерациям отвечают композиции дробно-линейных преобразований комплексной плоскости общего вида:

$$\zeta(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \zeta = \xi + i\eta,\ z = x + iy \;\Leftrightarrow\; (c\zeta - a)(cz + d) = (cb - ad). \tag{7}$$

Известно, и это можно проверить, что композиции преобразований (7) соответствует перемножение связанных с ними невырожденных матриц:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Задача 1. Найти образ полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ и вид матрицы (8) для дробно-линейного отображения (7), определённого формулой

$$(\zeta + 1)(z + 1) = 2.$$

Выбрав $\delta = 0$ в формуле (8) и обозначив

$$C_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ n \geq 0; \quad \begin{cases} Q_0 = \alpha_0, & Q_{-1} = 1 \\ R_0 = 1, & R_{-1} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

мы получаем:

[1]здесь имеется в виду известная теорема Гамильтона-Кэли

Lemma 2. При любом $n \geq 1$ результат перемножения матриц (9) записывается в виде:

$$C_n \cdot C_{n-1} \cdots C_0 = \left(\begin{array}{cc} Q_n & R_n \\ Q_{n-1} & R_{n-1} \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta_0 \end{pmatrix}) \tag{10}$$

где многочлены Q_n и R_n переменных $\alpha_j,\ \beta_j$ определяются рекурсионным соотношением (6) с начальными данными (9) и могут быть вычислены по следующим точным формулам

$$Q_n = \left[\prod_{k=1}^{n} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] \prod_{j=0}^{n} \alpha_j, \quad R_{n-1} = \partial_n \partial_0 Q_n, \quad \partial_j \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \alpha_j}. \tag{11}$$

◀ Сначала заметим, что при всех $n \geq 0$

$$\left[\begin{array}{cc} \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} \\ 1 & 0 \end{array} \right] \left(\begin{array}{cc} Q_n & R_n \\ Q_{n-1} & R_{n-1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \alpha_{n+1} Q_n + \beta_{n+1} Q_{n-1} & \alpha_{n+1} R_n + \beta_{n+1} R_{n-1} \\ Q_n & R_n \end{array} \right).$$

Отсюда и выбора C_0 в формуле (10) следует выполнение рекуррентных соотношений (6):

$$\begin{array}{ll} Q_{n+1} = \alpha_{n+1} Q_n + \beta_{n+1} Q_{n-1}, & Q_0 = \alpha_0, \quad Q_{-1} = 1 \\ R_{n+1} = \alpha_{n+1} R_n + \beta_{n+1} R_{n-1}, & R_0 = 1, \quad R_{-1} = 0, \end{array} \tag{12}$$

которые полностью определяют рассматриваемые многочлены Q_n и R_n. Доказательство формул (11) будем вести индукцией. При $n = 1$ прямым вычислением получаем

$$C_1 C_0 = \left[\begin{array}{cc} \alpha_0 \alpha_1 + \beta_1 & \alpha_1 \\ \alpha_0 & 1 \end{array} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta_0 \end{pmatrix}$$

При этом,

$$Q_1 = (I + \beta_1 \partial_1 \partial_0)(\alpha_0 \alpha_1) = \alpha_0 \alpha_1 + \beta_1, \quad R_0 = \partial_1 \partial_0 Q_1 = 1,$$

Следовательно, лемма верна при $n = 1$.

Предполагая теперь, что, при некотором $n \in \mathbb{N}$ лемма верна для всех натуральных чисел меньших $n+1$. Покажем её справедливость и при $n+1$.

Обозначив $A_n = \prod\limits_{j=0}^{n} \alpha_j$, имеем

$$Q_{n+1} = \alpha_{n+1} \left[\prod_{k=1}^{n} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] (A_n) + \beta_{n+1} \left[\prod_{k=1}^{n-1} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] (A_{n-1}) =$$

$$= \left[\prod_{k=1}^{n} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] (A_{n+1}) + \left[\prod_{k=1}^{n-1} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] (\beta_{n+1} \partial_{n+1} \partial_n A_{n+1}) =$$

$$= \left[\prod_{k=1}^{n-1} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] (I + \beta_n \partial_n \partial_{n-1} + \beta_{n+1} \partial_{n+1} \partial_n) (A_{n+1}).$$

Учитывая, что $\partial_k^2 A_n = 0$ для всех k и n, получаем

$$Q_{n+1} = \left[\prod_{k=1}^{n-1} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] \left(I + \beta_n \partial_n \partial_{n-1} + \beta_{n+1} \partial_{n+1} \partial_n + \beta_n \beta_{n+1} \partial_{n+1} \partial_n^2 \partial_{n-1} \right) (A_{n+1}) =$$

$$= (I + \beta_n \partial_n \partial_{n-1})(I + \beta_{n+1} \partial_{n+1} \partial_n) \left[\prod_{k=1}^{n-1} (I + \beta_k \partial_k \partial_{k-1}) \right] (A_{n+1}) = \left[\prod_{k=1}^{n+1} (I + \beta_k \partial_k \partial_{k-1}) \right] (A_{n+1}).$$

Аналогично проверяется выполнение соотношений для R_{n+1}.

$$R_{n+1} = \alpha_{n+1}\partial_{n+1}\partial_0 Q_{n+1} + \beta_{n+1}\partial_n\partial_0 Q_n =$$

$$\partial_0\left(\left[\alpha_{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}(I+\beta_k\partial_k\partial_{k-1})\right](A_n) + \beta_{n+1}\left[\prod_{k=1}^{n}(I+\beta_k\partial_{k-1}\partial_k)\right](A_{n-1})\right) =$$

$$\partial_0\left[\prod_{k=1}^{n}(I+\beta_k\partial_{k-1}\partial_k)\right]\big(\alpha_{n+1}(I+\beta_{n+1}\partial_{n+1}\partial_n)(A_n) + \beta_{n+1}\partial_{n+1}\partial_n A_{n+1}\big) =$$

$$\partial_0\left[\prod_{k=1}^{n}(I+\beta_k\partial_k\partial_{k-1})\right](I+\beta_{n+1}\partial_{n+1}\partial_n)(A_{n+1}).$$

Используя для правой части последнего равенства очевидное соотношение

$$A_{n+1} = \partial_{n+2}A_{n+2} = \partial_{n+2}(I+\beta_{n+2}\partial_{n+2}\partial_{n+1})(A_{n+2}),$$

окончательно получим

$$R_{n+1} = \partial_0\left[\prod_{k=1}^{n+2}(I+\beta_k\partial_k\partial_{k-1})\right](\partial_{n+2}A_{n+2}) = \partial_{n+2}\partial_0 Q_{n+2}.$$

Лемма доказана. ▶

Переходим к доказательству Теоремы 1:

◀ Заменив в произведении $B_m B_{m-1}\cdots B_0$ (см. (5)) все матрицы кроме B_0 в соответствии с формулой

$$B_n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n & b_n c_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_{n-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

мы получаем, после взаимного сокращения дополнительных диагональных сомножителей, произведение матриц типа C_n. Поэтому

$$B_m\cdot B_{m-1}\cdots B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_m \end{bmatrix}\begin{pmatrix} Q_m & R_m \\ Q_{m-1} & R_{m-1} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b_0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Здесь многочлены Q_n и R_n от переменных $(\alpha_j = a_j,\ \beta_j = b_j c_{j-1})$ определяются как и раньше формулами (11).... ▶

0.1 Дополнительные замечания.

Переходя в линейном уравнении (6) к проективным координатам мы получаем

$$\begin{gathered} f_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\psi_n}{\psi_{n-1}} \ \Rightarrow\ f_{n+1} = \alpha_{n+1} + \beta_{n+1}\frac{1}{f_n}, \quad f_n = \frac{\alpha_n f_{n-1} + \beta_n}{f_{n-1}}, \\ (\alpha_n f_{n+1} - \gamma_{n+1})(\alpha_n f_{n-1} + \beta_n) + \beta_n\beta_{n+1} = 0, \quad \gamma_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_n\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \end{gathered} \tag{14}$$

Задача 2. Найти матрицу (8) для дробно-линейного отобрпжения $f_{n-1}\to f_{n+1}$, определённого второй из формул (14). Найти неподвижные точки этого отображения в случае $\alpha_{n+2} = \alpha_n$, $\beta_{n+2} = \beta_n$, $\forall n$.

В теории непрерывных дробей уравнения (14) используются для переписывания формул Леммы 1 в следующем виде ([6], с.14-15):

$$\alpha_0 + \frac{\beta_1|}{|\alpha_1} + \frac{\beta_2|}{|\alpha_2} + \frac{\beta_3|}{|\alpha_3} + \cdots + \frac{\beta_n|}{|\alpha_n} = \frac{Q_n}{R_n}, \quad n \geq 1.$$

где многочлены Q_n и R_n от переменных $(\alpha_j,\ \beta_j)$ определяются при $n \geq 1$ теми же формулами (11). В доказательстве вместо матриц (9) используется композиция следующих дробно-линейных преобразований:

$$\tau_0(w) = w + \alpha_0, \quad \tau_p(w) = \frac{\beta_p}{w + \alpha_p},\ p > 0\ \Rightarrow\ \tau_0\tau_1\cdots\tau_n(w) = \frac{R_{n-1}w + R_n}{Q_{n-1}w + Q_n}.$$

Подробно изучается в монографии ([6], с.35) периодический случай $\alpha_{n+N} = \alpha_n$, $\beta_{n+N} = \beta_n$, $\forall n$.

Менее очевидна связь рассматриваемой задачи с трёхдиагональными матрицами Якоби

$$J = \begin{pmatrix} \alpha_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_2 & -1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{m-1} & \alpha_{m-1} & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_m & \alpha_m \end{pmatrix}, \quad \det J = Q_m \quad \text{see (12)}. \tag{15}$$

В теории колебаний собственные значения таких матриц определяют частоты колебани струны. Связи непрерывных дробей с этой задачей обсуждаются в работах G.GLADWELL (1986, 1993, 2004, 2014)(eps in Kulaev):

Рис.-1.-Система масс на пружинах: (a) со свободным правым концом; (b) с фиксированным правым концом

ЛЕКЦИЯ 2: Спектральный параметр.

При выводе нелинейных уравнений типа цепочки Тода (2) мы будем считать, что элементы матриц B_n вида (4) зависят от дополнительного параметра $t \in \mathbb{R}$ и удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}B_n = V_{n+1}B_n - B_nV_n. \tag{16}$$

Полагая

$$V_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} k & u_n(t) \\ v_n(t) & -k \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{bmatrix} a_n(t,k) & b_n(t) \\ c_n(t) & 0 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

мы находим, обозначая точками производные по t,

$$\begin{cases} \dot{a}_n = u_{n+1}c_n - b_nv_n \\ \dot{c}_n = a_nv_{n+1} - \lambda c_n \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{b}_n = \lambda b_n - a_nu_n \\ b_nv_{n+1} = c_nu_n \end{cases}, \quad \lambda \stackrel{\text{def}}{=} 2k.$$

Эти соотношения должны выполняться тождественно по "спектральному параметру" λ и, полагая $a_n = \lambda + \alpha_n$, мы получаем

$$\alpha_n = -\frac{d}{dt}\log u_n = \frac{d}{dt}\log v_{n+1}, \quad b_n = u_n, \quad c_n = v_{n+1}, \quad \beta_n = u_nv_n. \tag{18}$$

Другими словами указанная выше зависимость от произвольного параметра k матриц V_n позволяет выразить друг через друга элементы матриц B_n и V_n связанные уравнением (16).

Теорема 2. Уравнения (18) эквивалентны цепочке уравнений (2) и при периодическом замыкании уравнений (16) формулы Теоремы 1 дают первые интегралы соответствующей (2) динамической системы.

$\boxed{\text{not edited yet}}$

для элементов матриц B_n и C_n:

$$\dot\alpha_n = \beta_{n+1} - \beta_n, \quad \dot\beta_n = \beta_n(\alpha_{n-1} - \alpha_n), \tag{19}$$

где $\alpha_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} a_n - 2k,\ \beta_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} b_n c_{n-1}$.

◀ Матричное уравнение даёт при $\lambda = 2k$

Таким образом для элементов матриц V_n мы получаем

$$\begin{gathered} u_n = e^{-q_n} \ \Rightarrow\ \dot q_n = \alpha_n, \quad v_{n+1} = e^{q_n+\gamma_n},\ \dot\gamma_n = 0 \\ \dot\alpha_n = u_{n+1}v_{n+1} - u_n v_n \ \Rightarrow\ \ddot q_n = \exp(q_n - q_{n+1} + \gamma_n) - \exp(q_{n-1} - q_n + \gamma_{n-1}). \end{gathered} \tag{20}$$

Переписав найденные уравнения в терминах элементов матриц B_n получаем цепочку уравнений (19). Отметим, что исключение α_n из этих уравнений первого порядка, даёт цепочку уравнений второго порядка (2), указанную во введении. ▶

Полиномиальные первые интегралы цепочек Толы??? на матрицы B_n, произведение которых рассматривалось в Теореме 1.1 прошлой лекции. Дифференцирование произведений матриц B_n даёт, в силу известного правила Лейбница,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(B_{n+1}B_n\right) = \left(V_{n+2}B_{n+1} - B_{n+1}V_{n+1}\right)B_n + B_{n+1}\left(V_{n+1}B_n - B_nV_n\right) = \\ V_{n+2}B_{n+1}B_n - B_{n+1}B_nV_n. \end{aligned}$$

Следовательно, произведение матриц (13) из Лекции 1, отвечающее композиции дробно-линейных преобразований (7), удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d}{dt}B_n^{(m)} = V_{n+m+1}B_n^{(m)} - B_n^{(m)}V_n, \quad B_n^{(m)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} B_{n+m}\cdot B_{n+m-1}\cdots B_n,\ m \geq 1, \tag{21}$$

не отличающегося по-существу от исходного уравнения (**??**). Вопрос об условиях на выбор матриц V_n в этом уравнении, и есть главный предмет обсуждения в данной лекции.

Хотя уравнения цепочки Вольтерра можно рассматривать как редукцию уравнений (2) мы отложим пока вопрос о соответствующем уравнении вида (**??**) для цепочки (1) и остановимся здесь кратко на другом подходе к выводу этих уравнений, основанном на связи цепочкм Вольтерры с инвариантами группы дробно-линейных преобразований (см. Замечание 2 в конце предыдущей лекции).

Example 1 Нетрудно проверить, что цепочка уравнений

$$\dot u_n = \frac{(u_{n+1} - u_n)(u_n - u_{n-1})}{(u_{n+1} - u_{n-1})} \tag{22}$$

допускает группу дробно-линейных преобразований и инвариантна относительно трёх образующих этой группы. Более того можно доказать (см. [1]), что эти свойства инвариантности выделяют (22) среди цепочек общего вида:

$$\dot u_n = f(u_{n-1}, u_n, u_{n+1}).$$

В цитированной выше работе В.Адлера отмечается, что уравнения цепочки Вольтерра (1) определят динамику основного инварианта (34) группы Мобиуса:

$$X_n = \frac{(u_{n+1} - u_n)(u_{n-1} - u_{n-2})}{(u_{n+1} - u_{n-1})(u_n - u_{n-2})} \ \Rightarrow\ \frac{dX_n}{dt} = X_n(X_{n+1} - X_{n-1}).$$

Задача 2.1: Исследовать $\mathbb{Z}_3-$редукцию цепочки (22):

$$\frac{du}{dx} = \frac{(v-u)(u-w)}{v-w}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{(w-v)(v-u)}{w-u}, \quad \frac{dw}{dx} = \frac{(u-w)(w-v)}{u-v} \tag{23}$$

допускающую дробно-линейные преобразования и инвариантную относительно сдвигов. Получить для разностей $a = u - v,\ b = v - w,\ c = w - u$ динамическую систему

$$a' = abc\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right), \quad b' = abc\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right), \quad c' = abc\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right),$$

и найти её первые интегралы.

Возвращаясь к нашему основному уравнение (**??**), покажем, что это матричное дифференциальное уравнение представляет собой условие коммутирования операторов сдвига $T\ : n \to n+1$ и дифференцирования D_t. Запишем с этой целью условие формальной совместности двух вспомогательных линейных уравнений

$$D_t\Psi = \begin{pmatrix} k & u_n \\ v_n & -k \end{pmatrix}\Psi \equiv V_n\Psi, \quad T\Psi = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & 0 \end{bmatrix}\Psi \equiv B_n\Psi. \tag{24}$$

Здесь матрично-значная функция $\Psi \equiv \Psi_n(t)$ рассматривается как функция двух независимых переменных $t \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{Z}$ и второе уравнение определяет оператор $T\ :\ \Psi_n \to \Psi_{n+1}$ сдвига, как оператор умножения на матрицу B_n из предыдущей лекции, что соответствует разностному уравнению второго порядка (6). Первое уравнение, которое определяет оператор дифференцирования D_t как оператор умножения на матрицу V_n, также имеет второй порядок и сводится к скалярному дифференциальному уравнению второго порядка (см. ниже (**??**)).

Так как

$$D_tT\Psi = D_t\left(B_n\Psi\right) = \dot{B}_n\Psi + B_n\dot{\Psi} = \left(\dot{B}_n + B_nV_n\right)\Psi,$$
$$TD_t\Psi = T\left(V_n\Psi_n\right) = V_{n+1}T\Psi_n = V_{n+1}B_n\Psi_n,$$

то из уравнения (**??**) действительно следует $D_tT = TD_t$ после исключения матричной функции Ψ из соотношения $D_t(T\Psi) = T(D_t\Psi)$. Интересный вопрос о достаточности выполнения условия (**??**) и существовании совместного решения $\Psi_n(t)$ пары уравнений (24) здесь не рассматривается.

Задача 1.1 Проверить, что условие $\det B_n = 1$ согласуется с уравнением (48) и найти подходящий вид цепочки (20) в этом случае. Показать, что константы интегрирования γ_n в уравнениях (20) не являются существенными.

Уравнения (19) допускают $\mathbb{Z}_N-$редукции, т.е. периодическое замыкание с произвольным периодом $N \geq 2$:

$$\alpha_{n+N} = \alpha_n, \quad \beta_{n+N} = \beta_n, \quad u_{n+N} = u_n, \quad v_{n+N} = v_n, \qquad \forall\ n. \tag{25}$$

Это следует из инвариантности системы относительно сдвига $T\ :\ \ n \to n+1$ по дискретной перемной. Условия (25) позволяют, очевидно, ограничиться номерами $j \in [N]$ от 1 до N и превращают бесконечную динамическую систему (19) в конечномерную.

Example 2 $\mathbb{Z}_3-$редукция уравнений (19) даёт динамическую систему 6-го порядка:

$$\begin{cases} \dot\alpha_1 = \beta_2 - \beta_1, \quad \dot\alpha_2 = \beta_3 - \beta_2, \quad \dot\alpha_3 = \beta_1 - \beta_3 \\ \dot\beta_1 = \beta_1(\alpha_3 - \alpha_1), \ \dot\beta_2 = \beta_2(\alpha_1 - \alpha_2), \ \dot\beta_3 = \beta_3(\alpha_2 - \alpha_3), \end{cases}$$

которая обладает двумя очевидными первыми интегралами $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \mathrm{const}$ и $\beta_1\beta_2\beta_3 = \mathrm{const}$. Формула (5) даёт ещё два:

$$\frac{d}{dt}\left[\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3\right] = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\left[\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_3 + \beta_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\right] = 0$$

Задача 1.2 Проверить, что для бесконечной цепочки (19) выполняются следующие законы сохранения (ср. [3])

$$\dot\rho_j = (T-1)\sigma_j, \quad \rho_1(n) = \alpha_n, \quad \rho_2(n) = \alpha_n^2 - 2\beta_n, \quad \rho_3(n) = \alpha_n^3 - 3\alpha_n(\beta_{n+1} + \beta_n)$$

и найти $\sigma_j, \ j = 1, \ 2, \ 3$.

Задача 1.3 Проверить, что цепочка (2) в случае $\mathbb{Z}_2-$редукции сводится к дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{e^q - e^{-q}}{2} = \mathrm{sh}(q). \tag{26}$$

Понизить порядок и свести к уравнению эллиптических функций.

Задача 1.4 Записать уравнения (2) в случае $\mathbb{Z}_3-$редукции в матричном виде:

$$\frac{d^2}{dt^2}\log\vec\phi = A\vec\phi, \quad \vec\phi = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}, \quad A = ?.$$

Условие периодичности (25) позволяет перейти от уравнения (**??**) к более простому уравнению:

$$\frac{d}{dt}B(k) = \begin{pmatrix} k & u \\ v & -k\end{pmatrix} B(k) - B(k)\begin{pmatrix} k & u \\ v & -k\end{pmatrix}, \tag{27}$$

которое получается из (21) при $V_{n+N} = V_n$. В силу известной формулы дифференцирования определителя

$$\frac{d}{dt}\log\det B(t) = \mathrm{tr}\left(\frac{dB}{dt}\cdot B^{-1}\right)(t) \tag{28}$$

для решений уравнения (27) является инвариантом след $\mathrm{tr}\,B(t,k)$. Этот факт (см. Пример 1 выше) мы использовали для построения первых интегралов $\mathbb{Z}_N-$редукций цепочки (19). Существенную роль играют здесь явные формулы Теоремы 1.1 предыдущего параграфа.

Отметим, что роль уравнения (27) не исчерпывается периодическими замыканиями. Матричные решения $B(t,k)$ уравнения (27) можно перемножать, и совершенно не обязательно при этом ограничиваться нашим выбором матриц (13). На самом деле уравнение (27) уже не требует привязки к Теореме 1.1 и его можно использовать для построения и исследования различных специальных случаев спектральной задачи $\dot\Psi = V(t,k)\Psi$ не связанных с цепочкой уравнений (19).

Отметим ещё интересную задачу о связи законов сохранения бесконечной цепочки (см. Задачу 1.2) с первыми интегралами конечной динамической системы (см. Задача 1.1.) Первые интегралы, в отличие от плотностей ρ_j законов сохранения, можно перемножать и складывать. Обнаруженные в рассмотренных выше примерах связи между ними являются отражением известных формул Ньютона (см. Лекцию 5).

Связь с уравнением Рикатти.

В силу линейности рассмотренной выше спектральной задачи (ср. (24)):

$$\psi^1_x - k\psi^1 = u(x)\psi^2, \quad \psi^2_x + k\psi^2 = v(x)\psi^1; \\ \begin{pmatrix}\psi^1\\ \psi^2\end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix}k & u\\ v & -k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi^1\\ \psi^2\end{pmatrix} \tag{29}$$

порядок уравнения можно понизить переходом к "проективным координатам" :

$$y = \frac{\psi^2}{\psi^1} \;\Rightarrow\; y' + 2ky + uy^2 = v$$

Полученное уранение первого порядка с квадратичной нелинейностью носит имя Рикатти

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = a_0(x)y^2 + a_1(x)y + a_2(x)} \tag{30}$$

и сохраняет свою форму при обратимых дробно-линейных преобразованях аналогичных (7):

$$\hat y = \frac{\alpha(x)y + \beta(x)}{\gamma(x)y + \delta(x)} \tag{31}$$

Задача 1.5 Найти преобразование приводящее (30) к каноническому виду $y' + y^2 = c(x)$.

Связь уравнения Рикатти и соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка аналогична связи формул (7) и (8) в теории непрерывных дробей и имеет место классическое утверждение:

Теорема 2.2. Четверное отношение решений уравнения (30) от x не зависит:

$$\frac{(y_4 - y_2)(y_1 - y_3)}{(y_4 - y_3)(y_1 - y_2)} = \mathrm{const}\,. \tag{32}$$

◀ Рассмотрим разности $z_{ij} = y_i - y_j,\ i,j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ четырех различных решений уравнения (30). Очевидно

$$\frac{dz_{ij}}{dx} = a_0(y_i^2 - y_j^2) + a_1 z_{ij} \;\Rightarrow\; (\log(z_{ij}))_x = a_0(y_i + y_j) + a_1$$

и, следовательно,

$$(\log\frac{z_{13}}{z_{43}})_x = a_0\ z_{14}, \quad (\log\frac{z_{12}}{z_{42}})_x = a_0\ z_{14}$$

Разность полученных выражений равна нулю и отсюда следует утверждение теоремы.▶

Инварианты группы. Дробно-линейные преобразования комплексной плоскости образуют группу Мобиуса и сопоставив дробно-линейному преобразованию (7) алгебраическую кривую

$$(\gamma y-\alpha)(\gamma x+\delta)=\beta\gamma-\alpha\delta, \tag{33}$$

мы находим, что для произвольные четырех точек (x,y) и $(x_j,y_j),\ j=1,2,3$ этой кривой выполняется соотношение

$$\frac{(y-y_1)(y_2-y_3)}{(y-y_3)(y_2-y_1)}=\frac{(x-x_1)(x_2-x_3)}{(x-x_3)(x_2-x_1)}. \tag{34}$$

Переходя здесь к пределу $x\to x_3,\ y\to y_3$ мы находим, что

$$\frac{(y_1-y)(y-y_2)}{y'(x)(y_1-y_2)}=\frac{(x_1-x)(x-x_2)}{(x_1-x_2)}. \tag{35}$$

Выражения, стоящие в левых частях обеих этих формул являются инвариантами группы дробно-линейных преобразований. Аналогичным образом можно получить другие инварианты рассматриваемой группы, включая известную производную Шварца (см. следующую лекцию)

1.6: Задача. Найти аналог инварианта (32) для уравнения (30) при $a_0=0$, рассмотрев три решения $y_i,\ i=1,2,3$ этого уравнения.

ЛЕЛЦИЯ 3: Двумерные цепочки.

Обобщение Теоремы 2.1 на случай двух непрерывных переменных x, y и одной дискретной $n\in\mathbb{Z}$ приводит к следующей

Лемма 5.2. Пусть $c(n)=c(n;x,y)$, $b(n)=b(n;x,y)$ удовлетворяют цепочке уравнений:

$$D_x\log c(n)=b(n+1)-b(n),\quad D_yb(n)=c(n)-c(n-1),\quad n\in\mathbb{Z}. \tag{36}$$

Тогда
i)решения разностных уравнений:

$$(D_x+b(n))\psi(n)+\psi(n-1)=0,\quad D_y\psi(n)=c(n)\psi(n+1), \tag{37}$$

удовлетворяют вспомогательным линейным уравнениям:

$$[D_xD_y+b(n)D_y+c(n)]\psi(n)=0,\quad n\in\mathbb{Z} \tag{38}$$

и выполняются следующие уравнения Дарбу для инвариантов Лапласа $c(n)$:

$$[\log c(n)]_{xy}=c(n+1)+c(n-1)-2c(n),\quad n\in\mathbb{Z}, \tag{39}$$

ii) Операторы сдвига и дифференцирования коммутируют друг с другом.

◀ Пусть выполнены уравнения (36). Тогда в силу равенства смешанных производных

$$D_xD_y(\log c(n))=D_yD_x(\log c(n))=b_y(n+1)-b_y(n)=c(n+1)+c(n-1)-2c(n),$$

что даёт цепочку уравнений Дарбу. Для доказательства ii) определим операторы "сдвига" $T^{\pm 1}: \ \psi(n) \to \psi(n \pm 1)$. Тогда, используя формулы $Tc(n) = c(n+1)T, \quad T^{-1}c(n)T = c(n-1)$, $[D_x, D_y] = [D_x, T] = [D_y, T] = 0$ получаем:

$$[D_x+b(n)+T^{-1},\ D_y-c(n)T] = (-c_x(n)+c(n)b(n+1)-b(n)c(n))T+c(n)-c(n-1)-b_y(n) = 0. \blacktriangleright \tag{40}$$

Обсудим кратко задаче об интегрировании линейного гиперболического уравнения второго порядка относительно функции $\psi = \psi(x, y)$:

$$[D_xD_y + b(x, y)D_y + c(x, y)]\psi = 0, \tag{41}$$

при помощи теории преобразований Дарбу.

Алгебраические преобразования.

$$N \circ L = L_1 \circ M, \quad \text{shemsigma17.pdf}$$

Инварианты Лапласа

$$0 = \varphi_{xy} + a\varphi_x + b\varphi_y + c\varphi = \begin{cases} (D_y + a)(D_x + b)\varphi + (c - ab - b_y)\varphi \\ (D_x + b)(D_y + a)\varphi + (c - ab - a_x)\varphi \end{cases}$$

Формула Фаа де Бруно. Частные инварианты.

Частные инварианты являются прямым обобщением первых интегралов динамических систем на случай уравнений с частными производными. (chp.tex in Linprob), (AdSh12.tex in Lectures)

Дифференцировании композиции функций приводит к обобщению формулы Лейбница, играющему исходную роль в теории интегрируемости нелинейных уравнений и определяющую язык [5], на котором излагается симметрийный подход к этой теории. Дополнительный интерес к этой классической формуле, опубликованной Франческо Фаа-ди-Бруно в 1857г, связан с очевидной аналогией её структуры с формулами из Теоремы 1.1 и задачей о некоммутативных обобщениях этих формул.

Высшие производные порядка $n > 1$ сложной функции $f[u(x), v(x), ..., z(x)]$ от независимой переменной $x \in \mathbb{R}$ можно представить, как будет доказано ниже, в виде аналогичном известном формуле при $n = 1$:

$$\frac{d}{dx} f[u(x), v(x), ..., z(x)] = \hat{D}(f), \quad \hat{D} = u_1\frac{\partial}{\partial u} + v_1\frac{\partial}{\partial v} + \cdots + z_1\frac{\partial}{\partial z}. \tag{42}$$

Здесь $u_1,\ v_1, \ldots,$ обозначают первые производные функций $u(x),\ v(x), \ldots$ и рассматриваются как новые дополнительные независимые переменные. Формула Фаа-ди-Бруно является обобщением (42) и записывается в виде

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n f[u(x), v(x), ..., z(x)] = \left(\sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n} \frac{\hat{B}_1^{k_1}\hat{B}_2^{k_2}\cdots\hat{B}_n^{k_n}}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\right) f(u, v, ...z), \tag{43}$$

Здесь

$$\hat{B}_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{u_j}{j!}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{v_j}{j!}\frac{\partial}{\partial v} + ... + \frac{z_j}{j!}\frac{\partial}{\partial z}, \quad j \geq 1 \tag{44}$$

дифференциальный оператор первого порядка, аналогичный (42), который действует на функции переменных $u,\ v,\ \dots$ и переводят их в многочлен от производных $u_j,\ v_j,\ \dots$ порядка j. Например при $n=2,\ 3,\ 4$ формула (43) даёт

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f[u(x),v(x)] = f^{(2)} = \left[u_2\partial_u + v_2\partial_v + u_1^2\partial_u^2 + 2u_1v_1\partial_u\partial_v + v_1^2\partial_v^2)^2\right] f(u,v) = \left[2\hat{B}_2 + \hat{B}_1^2\right] f$$
$$f^{(3)} = \left(6\hat{B}_3 + 3\hat{B}_2\hat{B}_1 + \hat{B}_1^3\right) f, \quad f^{(4)} = \left(4!\hat{B}_4 + 4!\hat{B}_3\hat{B}_1 + 12\hat{B}_2^2 + 12\hat{B}_2\hat{B}_1^2 + \hat{B}_1^4\right) f.$$

Число слагаемых в этих формулах зависит от порядка производной $f^{(n)}$ и определяется числом решений диофантового уравнения

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots + nk_n = n, \quad k_j \ge 0, \tag{45}$$

которое совпадает с числом различных разбиенией [2] (i.e partitions) целого числа $n \ge 1$.

Для доказательства формулы Фаа-ди-Бруно мы вводим в рассмотрение алгебру $\mathcal{F}$ *дифференциальных функций* вида $F(x,\mathbf{u},\mathbf{u_1},\dots\mathbf{u_m})$[3] и определяем на этой алгебре оператор D_x *полного дифференцирования*:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{u_1}\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{u_2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{u_1}} + \mathbf{u_3}\frac{\partial}{\partial \mathbf{u_2}}\dots, \tag{46}$$

который совпадает с оператором (42) на подалгебре основных функций $F(\mathbf{u})$ не зависящих от дополнительных *дифференциальных переменных* $\mathbf{u_1},\ \mathbf{u_2},\dots$.

Лемма 4.1. Линейные операторы (44), рассматриваемые в алгебе $\mathcal{F}$ дифференциальных функций коммутируют между собой и удовлетворяют коммутационному соотношению

$$j\hat{B}_j = D_x\hat{B}_{j-1} - \hat{B}_{j-1}\hat{D}, \quad j \ge 1, \tag{47}$$

где D_x оператор полного дифференцирования (46):

$$D_x: \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u_1} \mapsto \mathbf{u_2} \mapsto \dots \mapsto \mathbf{u_k} \mapsto \dots$$

not edited yet

Задача 5.1: Пусть

$$f_*(g) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f[u+\varepsilon g] - f[u]}{\varepsilon}; \quad g = g(x,[u]). \tag{48}$$

Проверить, что для дифференциальных функций $f \in \mathcal{F}$, не зависящих от x

$$D_x(f) = f_*(u_1)$$

Многочлены Шура.

$$\begin{gathered}\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j\lambda^j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\vec{x})\lambda^n, \quad H_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2,\ H_3 = \frac{1}{6}x_1^3 + x_1x_2 + x_3, ..\\ H_n(\vec{x}) = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}\frac{x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}}{k_1!k_2!\cdots k_n!}, \quad \partial_j H_n = H_{n-j}\end{gathered} \tag{49}$$

Comtet,"Advanced combinatorics."

[2] cp. [4], Ch.2, Exls 11-12
[3] **u=(u,v,...,z) обозначает здесь вектор**

Производящие функции симметрических многочленов.

Хорошо развитую теорию симметрических многочленов можно использовать как модель при изучении алгебраических свойств первых интегралов интегрируемых динамических систем. Одна из полезных идей связана с использованием при выводе и обобщении формул Ньютона формализма производящих функций.

Наряду с элементарными симметрическими многочленами $e_r,\ r \geq 0$ и их производящей функцией $E(t)$:

$$E(t) = \sum_{r\geq 0} e_r t^r = \prod_{i\geq 1}(1 + x_i t), \quad e_r = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r},\ r \geq 1 \tag{50}$$

в книге [4] рассматривается пара похожих производящих функций

$$\begin{gathered} H(t) = \sum_{r\geq 0} h_r t^r = \prod_{i\geq 1}(1 - x_i t)^{-1}, \quad P(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{1 - tx_i} = \sum_{r\geq 1} p_r t^{r-1} \\ H(t)E(-t) = 1 \ \Leftrightarrow\ \sum_{r=0}^{n}(-1)^r e_r h_{n-r} = 0, \quad P(-t) = \frac{E'(t)}{E(t)} \ \Leftrightarrow\ ne_n = \sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1} p_r e_{n-r} \end{gathered} \tag{51}$$

Нетрудно проверить, что $p_r = \sum x_i^r,\ r \geq 1$ и что

$$h_r = \sum_{|\lambda|=r} m_\lambda \quad \text{полная симметрическая функция степени } r \geq 0,$$

где $\lambda-$произвольное разбиение (i.e. partition) и m_λ получено симметризацией монома $x^\lambda = x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots$ (см. [4], формула (2.1)). Соотношения (51) между производящими функциями позволяют в частности определить отображение $\omega(e_r) = h_r$ и доказать, что ω^2-тождественное отображение [4].

Пусть $e_j(\mathbf{x})-$элементарные симметрические многочлены от $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Тогда при любом $m \geq 5$ справедливы следующие формулы, коэффициенты которых от m не зависят:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{m} x_j = e_1, \quad \sum_{j=1}^{m} x_j^2 = e_1^2 - 2e_2, \quad \sum_{j=1}^{m} x_j^3 = e_1^3 + 3e_3 - 3e_1e_2, \\ \sum_{j=1}^{m} x_j^4 = e_1^4 - 4e_4 + 2g_2^2 + 4g_1g_3 - 4g_1^2g_2, \quad \sum_{j=1}^{m} x_j^5 = e_1^5 - 5e_5 + \ldots \end{gathered}$$

Формулы Ньютона связывают суммы степеней корней x_j многочлена $P(\lambda) = \prod(\lambda - x_j)$ с формулами Виетта для его коэффициентов:

$$ne_n = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1} p_j e_{n-j}$$

Example 3 Let $m = 3$. Then

$$\begin{gathered} e_1e_2 = (x + y + z)(xy + xz + yz) = e_3 + 3xyz, \quad e_1p_2 = p_3 + e_3 - xyz \\ e_1(p_2 - e_2) = x^3 + y^3 + z^3 - 2xyz, \quad p_3 = e_1^3 - 3e_3 + 2xyz \end{gathered}$$

[4] элементы градуированного кольца Λ не являются строго говоря многочленами

ЛЕКЦИЯ 6: Rogue waves. Классификация солитонов.

P.Gaillard,2014; Jen-Hsu Chang(Y.Ohta); Marta MAZZOCCO(Hankel determinant formula for generic solutions of the Painlevŕe II equation); A.Dimakis, F.Muller-Hoissen (Matrix KP).

Классифмкация солитонов уравнения КдФ основана на уравнениях "одевающей цепочки;"

$$(f_j + f_{j+1})_x = f_j^2 - f_{j+1}^2 + \alpha_j \tag{52}$$

связь которой с уравнением с частными производными

$$\phi_t + \phi_{xxx} - 6\lambda\phi_x = 2\phi_x^3, \quad \phi = \log\psi \tag{53}$$

и обыкновенными дифференциальными уравнениями типа Пенлеве объясняется ниже.

Теория Гамильтона-Якоби (мелкий шрифт).

Мы начнём с обсуждения *линеаризуемой* динамической системы, соответствующей, как нетрудно заметить, $\mathbb{Z}_3$ редукции цепочки (22). Этот учебный пример поясняет некоторые характерные черты аналитической теории динамических систем.

Отметим, что при $N > 3$ $\mathbb{Z}_N$ редукции цепочки (22) сводятся к $\mathbb{Z}_N$ редукциям цепочки Вольтерры (1) (см. Задача 2.?).

В случае периодического замыкания $q_{n+N} = q_n$ цепочки Тоды (20) мы можем начать с лагранжевой формулировки соответствующей динамической системы для $q_n(t),\ n \in [N]$:

$$\ddot{q}_n = e^{q_n - q_{n+1}} - e^{q_{n-1} - q_n} \ \Leftrightarrow\ \delta\mathcal{L} = \delta\sum_{n=1}^{N}\left[(\frac{1}{2}\dot{q}_n)^2 + \exp(q_n - q_{n+1})\right] = 0 \tag{54}$$

◀ В силу известных формул вариационного исчисления мы имеем

$$\delta\sum_{n=1}^{N}(\dot{q}_n)^2 = 2\sum_{n=1}^{N}(\dot{q}_n)\delta\dot{q}_n = -2\sum_{n=1}^{N}(\ddot{q}_n)\delta q_n$$

$$\delta\sum_{n=1}^{N} f(q_n - q_{n+1}) = \sum_{n=1}^{N} f'(q_n - q_{n+1})(\delta q_n - \delta q_{n+1}) = \sum_{n=1}^{N}\left[f'(q_n - q_{n+1}) - f'(q_{n-1} - q_n\right]\delta q_n.$$

Цепочка Тоды соответствует выбору $f(x) = e^x$ в указанном выше уравнении Эйлера (54):

$$2\ddot{q}_n = f'(q_n - q_{n+1}) - f'(q_{n-1} - q_n). \quad ▶$$

Рассмотрим задачу о восстановлении динамической системы по её первым интегралам. Эта задача имеет богатую историю... *Матрицей Якоби* в $\mathbb{R}^n$ мы называем невырожденную $n \times n$ матрицу $A(x),\ x \in \mathbb{R}^n$ с элементами a_{ij}, удовлетворяющими условиям

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j}, \quad \forall\ i,\ j,\ k, \tag{55}$$

Следующая теорема Ли-Лиувилля связывает первые интегралы с векторными полями.

Теорема 3. Пусть $B = (A^\intercal)^{-1}$, где $A = A(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ матрица Якоби в $\mathbb{R}^n$. Тогда формула $\hat{D} = B\nabla$, где $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)^\intercal$– вектор-столбец составленный из дифференцирований $\partial_j = \partial/\partial x_j$, определяет n коммутирующих векторных полей в $\mathbb{R}^n$:

$$\hat{D}_i = b_{i1}\partial_1 + \cdots + b_{in}\partial_n, \quad [\hat{D}_i, \hat{D}_j] = 0. \tag{56}$$

◀ Условия (55) обеспечивают замкнутость дифференциальных форм $\sum_j a_{ij} dx_j$ и существование локальной системы координат $\hat{\mathbf{x}} = \varphi(\mathbf{x})$:

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \hat{x}_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \tag{57}$$

в которой $d\hat{x} = A(x)dx$ и

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \hat{x}_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_j} \;\Leftrightarrow\; \nabla = A^\intercal \hat{D}. \tag{58}$$

Другими словами

$$d\hat{x} = A(x)\; dx \;\Leftrightarrow\; \hat{D} = B(x) \cdot \nabla$$

и дифференциальные операторы (56) совпадают с дифференцрованиями $\hat{\partial}_j = \partial/\partial \hat{x}_j$ в новой системе координат (57).▶

Вообще говоря, динамическая система восстанавливается по своим полиномиальным первым интегралам[5] неоднозначно. Мы рассмотрим два примера, связанные с уравнениями

$$\dot{u}_n = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}), \qquad u_t = u_{xxx} - 6uu_x. \tag{59}$$

Периодич. замыкание (1) и эллиптич. решения КдФ. Два разных по существу объекта (счётный и континуальный набор динамических переменных, соответственно), но алгебраические структуры, описывающие их интегрируемость отличаются лишь "техническими" деталями.

Example 4 Рассмотрим динамическую систему:

$$g_{1,x} = g_1(g_3 - g_2) + \alpha_1, \quad g_{2,x} = g_2(g_1 - g_3) + \alpha_2, \quad g_{3,x} = g_3(g_2 - g_1) + \alpha_3. \tag{60}$$

При $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ уравнения (60) обладает тремя первыми интегралами σ_i:

$$g_1 + g_2 + g_3 = \sigma_0, \quad \sigma_i = 2g_1g_2g_3 + g_i(\alpha_{i-1} - \alpha_{i+1}) + \alpha_i(g_{i+1} - g_{i-1}), \quad i = 1,\ 2.$$

При этом уравнения (**??**) сводятся к уравнениям первого порядка

$$\left(\frac{g_i'}{g_i}\right)^2 = (g_i - \sigma)^2 + 2(\alpha_{i-1} - \alpha_{i+1}) + \frac{\alpha_i^2}{g_i^2} - 2\frac{\sigma_i}{g_i}, \quad i = 1,\ 2$$

эквивалентным уравнению для эллиптических функций

$$(g')^2 = \alpha_0 g^4 + \alpha_1 g^3 + \alpha_2 g^2 + \alpha_3 g + \alpha_4 \;\Leftrightarrow\; (y')^2 = 6y^3 + \beta y + \gamma. \tag{61}$$

Напомним, что решения уравнения (61) являются двояко- периодическими и что периоды (комплексные) выражаются через коэффициенты эллиптическими интегралами.

Обратимая замена $g_j = f_j + f_{j+1}$, $j = 1, 2, 3$ сводит динамическую систему (**??**) к уравнениям (52) "одевающей цепочки" связь которой с уравнением КдФ объясняется выше (см. (**??**))

[5] в лучшем случае они определяют фазовый "портрет"

Список литературы

[1] В.Э. Адлер, "Интегрируемые Мёбиус-инвариантные эволюционные цепочки второго порядка," Функц. анализ и его прил., **50**(4), 13-25, (2016)

[2] А.Б. Шабат, "Симметрические многочлены и законы сохранения," *Владикавк. мат. журн.*, **14**(4): 83-94, 2012

[3] Р.Н.Гарифуллин, А.Шабат, "О структуре полиномиальных законов сохранения," *ТМФ*, **161**(3): 1589-97, 2009

[4] Ian Macdonald,"Symmetric functions.." Oxford, 1998.

[5] Н.Х. Ибрагимов, А.Б. Шабат, "Эволюционные уравнения с нетривиальной группой Ли-Беклунда," *Функц. Анализ и его прилож.*, **14**(1): 25–36, 1980.

[6] H.S. Wall, "Analytic theory of continued fraction," NY, 1948.

[7] L.Eisenhart, "A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces," 1909 (NY 2006?).

[8] I.Schur,"Uber vertauschbare lineare Differentialausdrucke," *Sitzungsber. Berliner Math. Gen.*, **4**: 2–8, 1905.

[9] Faa di Bruno, "Note sur un nouvelle formulae de calcul differentiel," *Quart.J.M.*, **1**: 359-360, 1857