Спецкурс 0818

А.Шабат

jun2018

Содержание

Предисловие.
На сайте (matphys.itp.ac.ru) Сектора мат.физики ИТФ им. Ландау можно найти обновляемые записи лекций (В.Э.Адлера и А.Б.Шабата), в которых излагаются с двух разных точек зрения математические основы теории солитонов предназначенные для широкой публики, включая студентов и аспирантов.)

В данных лекциях краеугольным камнем служит система связанных друг с другом гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными:

$$(\log w_n)_{xy} = w_{n+1} + w_{n-1} - 2w_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{0.1}$$

В результате редукции $w_n(x,y) = z_n(x+y)$ эта система переходит в так называемую цепочку Тоды-Дарбу:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \log z_n = z_{n+1} + z_{n-1} - 2z_n, \quad (\tau \equiv x+y), \tag{0.2}$$

которую мы также используем как одну из основных моделей теории солитонов. Уравнения (0.2) можно переписать в виде уравнений, описывающих движение системы точек на прямой [1]:

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = f(q_{n+1} - q_n) - f(q_n - q_{n-1}). \tag{0.3}$$

При $f(u) = e^u$ это, как будет показано в Лекции 2, даёт пример механической системы, обладающей бесконечным числом независимых интегралов движения.

В исходном виде система уравнений (0.1) имеет многочисленные приложения в геометрии и исторически геометрические исследования (Дарбу и др.) этой системы являются предтечей современной теории интегрируемых систем, излагаемой в данных лекциях. Одномерные редукции (0.3), нестрого говоря являются бесконечномерными динамическими системами и описывают "динамику" по непрерывной переменной $t \in \mathbb{R}$ бесконечного набора переменных $q_j,\ j \in \mathbb{Z}$. Мы рассматриваем их законы сохранения, обобщающие первые интегралы конечномерных вариантов этих цепочек. Это приводит к полному в определённом смысле (Теорема 1 из Лекции 2) списку интегрируемых цепочек вида (0.3), (0.2). Аналогичная задача (Лекции 3 и 4) в конечномерном случае оказывается на порядок сложнее, и требует привлечения как классификационых теорем полупростых алгебр Ли, так и развития теории интегрируемости двумерных гиперболических систем обобщающих обобщающих уравнение Лиувиля $u_{xy} = e^u$.

1 ЛЕКЦИЯ 1: Производящая функция интегралов.

При выводе законов сохранения дифференциальных уравнений, связанных с цепочками (0.3) и (0.1), мы опираемся на обобщение следующей элементарной формулы для следа произведения трёх матриц:

$$B_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & 0 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \operatorname{tr} B_2 B_1 B_0 = a_2 a_1 a_0 + a_2 b_1 c_0 + a_1 b_0 c_2 + a_0 b_2 c_1 \tag{1.1}$$

на случай произведения большого числа матриц B_n. Такие формулы для следов произведений матриц и соответствующие им однородные многочлены играют заметную роль в разнообразных задачах математической физики.

Теорема 1(1). При любом $m \geq 1$ след произведения матриц B_n выражается следующей формулой, содержащей перестановочные друг с другом операторы дифференцирования ∂_j:

$$\operatorname{tr} B_m \cdots B_0 = \prod_{k=0}^{m} \Delta_k \left(\prod_{j=0}^{m} a_j \right), \tag{1.2}$$

[1] с взаимодействием ближайших соседей

где

$$\beta_0 = b_0 c_m, \quad \beta_j = b_j c_{j-1},\ j \in [m] = \{1,\ 2, \ldots,\ m\};$$
$$.\Delta_k = I + \beta_k \partial_k \partial_{k-1},\ k \in [m], \quad \Delta_0 \overset{\mathrm{def}}{=} I + \beta_0 \partial_0 \partial_m, \quad \partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial a_j},\ j \ge 0. \tag{1.3}$$

Example 1 Формула (1.3) при $m = 3$ (ср. (1.1)) даёт

$$\operatorname{tr} B_3 B_2 B_1 B_0 = a_3 a_2 a_1 a_0 + \beta_0 a_1 a_2 + \beta_1 a_2 a_3 + \beta_2 a_3 a_0 + \beta_3 a_0 a_1 + \beta_0 \beta_2 + \beta_1 \beta_3.$$

Отметим, что подставив $a_n = \alpha_n + \lambda$ в эту формулу мы получаем многочлен от λ:

$$G_4(\lambda) = \lambda^4 + g_1 \lambda^3 + g_2 \lambda^2 + g_3 \lambda + g_4, \quad g_4 = \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3; \tag{1.4}$$

коэффициенты которого g_j являются однородными полиномами от переменных α_i и β_i при условии, что $\deg \alpha_i = 1,\ \deg \beta_i = 2$ и, что при перемножении степени переменных складываются. При этом

$$g_1 = \sum \alpha_i = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad \deg g_j = j, \ \ j \in [m].$$

Доказательство Теоремы 1 сводится к фактическому перемножению матриц (1.1) при $c_n = 1,\ \forall\ n$. Обозначив

$$C_n \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{bmatrix} a_n & \beta_n \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ n \ge 0; \quad \begin{cases} Q_0 = a_0, & Q_{-1} = 1 \\ R_0 = 1, & R_{-1} = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

мы получаем.

Лемма 2(1). При любом $n \ge 1$ результат перемножения матриц (1.5) записывается в виде:

$$C_n \cdot C_{n-1} \cdots C_0 = \begin{pmatrix} Q_n & R_n \\ Q_{n-1} & R_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta_0 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

где многочлены Q_n и R_n переменных $a_j,\ \beta_j$ определяются следующими точными формулами

$$Q_n = \left[\prod_{k=1}^{n} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] \prod_{j=0}^{n} a_j, \quad R_{n-1} = \partial_n \partial_0 Q_n, \quad \partial_j \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial}{\partial a_j}. \tag{1.7}$$

◀ Сначала заметим, что при всех $n \ge 0$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_n & R_n \\ Q_{n-1} & R_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} Q_n + \beta_{n+1} Q_{n-1} & \alpha_{n+1} R_n + \beta_{n+1} R_{n-1} \\ Q_n & R_n \end{pmatrix}.$$

Отсюда и формул (1.5) следует выполнение рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= a_{n+1} Q_n + \beta_{n+1} Q_{n-1}, \qquad Q_0 = a_0, \quad Q_{-1} = 1 \\ R_{n+1} &= a_{n+1} R_n + \beta_{n+1} R_{n-1}, \qquad R_0 = 1, \quad R_{-1} = 0, \end{aligned} \tag{1.8}$$

которые полностью определяют рассматриваемые многочлены Q_n и R_n при $n \ge 0$. Доказательство формул (1.7) будем вести индукцией. При $n = 1$ прямым вычислением получаем

$$C_1 C_0 = \begin{bmatrix} a_0 a_1 + \beta_1 & a_1 \\ a_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta_0 \end{pmatrix}$$

При этом,

$$Q_1 = (I + \beta_1 \partial_1 \partial_0)(a_0 a_1) = a_0 a_1 + \beta_1, \quad R_0 = \partial_1 \partial_0 Q_1 = 1,$$

Следовательно, лемма верна при $n = 1$.

Предполагая теперь, что, при некотором $n \in \mathbb{N}$ лемма верна для всех натуральных чисел меньших $n+1$. Покажем её справедливость и при $n+1$.

Обозначив $A_n = \prod_{j=0}^{n} \alpha_j$, имеем

$$Q_{n+1} = \alpha_{n+1} \left[\prod_{k=1}^{n} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] (A_n) + \beta_{n+1} \left[\prod_{k=1}^{n-1} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] (A_{n-1}) =$$

$$= \left[\prod_{k=1}^{n} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] (A_{n+1}) + \left[\prod_{k=1}^{n-1} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] (\beta_{n+1} \partial_{n+1} \partial_n A_{n+1}) =$$

$$= \left[\prod_{k=1}^{n-1} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] (I + \beta_n \partial_n \partial_{n-1} + \beta_{n+1} \partial_{n+1} \partial_n) (A_{n+1}).$$

Учитывая, что $\partial_k^2 A_n = 0$ для всех k и n, получаем

$$Q_{n+1} = \left[\prod_{k=1}^{n-1} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] \left(I + \beta_n \partial_n \partial_{n-1} + \beta_{n+1} \partial_{n+1} \partial_n + \beta_n \beta_{n+1} \partial_{n+1} \partial_n^2 \partial_{n-1} \right) (A_{n+1}) =$$

$$= (I + \beta_n \partial_n \partial_{n-1})(I + \beta_{n+1} \partial_{n+1} \partial_n) \left[\prod_{k=1}^{n-1} (I + \beta_k \partial_k \partial_{k-1}) \right] (A_{n+1}) = \left[\prod_{k=1}^{n+1} (I + \beta_k \partial_k \partial_{k-1}) \right] (A_{n+1}).$$

Аналогично проверяется выполнение соотношений для R_{n+1}.

$$R_{n+1} = \alpha_{n+1} \partial_{n+1} \partial_0 Q_{n+1} + \beta_{n+1} \partial_n \partial_0 Q_n =$$

$$\partial_0 \left(\left[\alpha_{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} (I + \beta_k \partial_k \partial_{k-1}) \right] (A_n) + \beta_{n+1} \left[\prod_{k=1}^{n} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] (A_{n-1}) \right) =$$

$$\partial_0 \left[\prod_{k=1}^{n} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] \left(\alpha_{n+1} (I + \beta_{n+1} \partial_{n+1} \partial_n)(A_n) + \beta_{n+1} \partial_{n+1} \partial_n A_{n+1} \right) =$$

$$\partial_0 \left[\prod_{k=1}^{n} (I + \beta_k \partial_k \partial_{k-1}) \right] (I + \beta_{n+1} \partial_{n+1} \partial_n)(A_{n+1}).$$

Используя для правой части последнего равенства очевидное соотношение

$$A_{n+1} = \partial_{n+2} A_{n+2} = \partial_{n+2} (I + \beta_{n+2} \partial_{n+2} \partial_{n+1})(A_{n+2}),$$

окончательно получим

$$R_{n+1} = \partial_0 \left[\prod_{k=1}^{n+2} (I + \beta_k \partial_k \partial_{k-1}) \right] (\partial_{n+2} A_{n+2}) = \partial_{n+2} \partial_0 Q_{n+2}.$$

Лемма доказана. ▶

Переходим к доказательству Теоремы 1:

◀ Заменив в произведении $B_m B_{m-1} \cdots B_0$ (см. (1.3)) все матрицы кроме B_0 в соответствии с формулой

$$B_n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n c_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_{n-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

мы получаем, после взаимного сокращения дополнительных диагональных сомножителей, произведение матриц типа C_n. Поэтому

$$B_m \cdot B_{m-1} \cdots B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_m & R_m \\ Q_{m-1} & R_{m-1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b_0 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

Отсюда и явных формул (1.7) для многочлены Q_n и R_{n-1} следуют формулы (1.2) и (1.3). ▶

При доказательстве Леммы 2 мы получили явные формулы для элементов произведения (1.6) матриц 2×2 вида (1.5). Это и рекурсионные соотношения (1.8) приводят к модификации Теоремы 1, в которой вместо следа произведения матриц (1.5) рассматривается определитель соответствующей этому произведению трёхдиагональной матрицы:

Теорема 3(1). В обозначениях Леммы 2 справедлива следующая формула

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{m-1} & a_{m-1} & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_m & a_m \end{pmatrix} = \left[\prod_{k=1}^{m} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] \prod_{j=0}^{m} a_j. \tag{1.10}$$

◀ Разложив определитель $\widetilde{Q}_m$, рассматриваемой трёхдиагональной по двум ненулевым элементам последней строки мы получаем при $\beta_0 = 0$ и любом $m \geq 1$

$$\widetilde{Q}_m = a_m \widetilde{Q}_{m-1} + \beta_m \widetilde{Q}_{m-2}, \quad \widetilde{Q}_0 = a_0, \quad \widetilde{Q}_{-1} \stackrel{\text{def}}{=} 1; \qquad (\beta_0 = 0).$$

Так как это разностное уравнение совпадает с первым из уравнений (1.8) и однозначно определяет $\widetilde{Q}_m$, то формула (1.10) является следствием (1.7). ▶

Подстановка $a_n = \alpha_n + \lambda$ из Примера 1 превращает определитель (1.10) в многочлен $\Delta(\lambda)$ степени m от λ. В линейной теории колебаний нули $\Delta(\lambda) = 0$ определителя трёхдиагональной матрицы Якоби определяют собственные частоты колебаний струны. Обсуждение связи собственных частот с теорией непрерывных дробей и со спектром различных краевых задач для разностного уравнения

$$\psi_{n+1} = (\alpha_{n+1} + \lambda)\, \psi_n + \beta_{n+1} \psi_{n-1}$$

можно найти в монографии [5].

Замечание 1(1). В аналитической теории непрерывных дробей явные формулы Леммы 2 записываются в зашифрованном виде [2] (ср. [12], с.14-15):

$$a_0 + \frac{\beta_1|}{|a_1} + \frac{\beta_2|}{|a_2} + \frac{\beta_3|}{|a_3} + \cdots + \frac{\beta_n|}{|a_n} = \frac{Q_n}{R_n}, \quad n \geq 1. \tag{1.11}$$

Это позволяет объединить в определённом смысле формулы связанные с трёхдиагональной матрицей из Теоремы 3 с формулами из Леммы 2 для произведения 2×2 матриц вида (1.5)

[2] обозначения нельзя назвать удобными

1.1 Симметрические многочлены.

В заключение остановимся кратко на вопросе о предельном переходе в формуле (1.2) из Теоремы 1 при $m \to \infty$: При перемножении операторов в формуле (1.2):

$$\Delta^{(m)} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=0}^{m} \Delta_k, \quad \Delta_k = I + \beta_k \partial_k \partial_{k-1},\ k \in [m], \quad \Delta_0 = I + \beta_0 \partial_0 \partial_m,$$

нужно учитывать, что не все слагаемые (i.e. partitions) дают вклад после применение оператора $\Delta^{(m)}$ к многочлену

$$\prod_{k=0}^{m} a_k = \prod_{k=0}^{m} (\lambda + \alpha_k) = \lambda^{m+1} + e_1(\alpha)\lambda^m + e_2(\alpha)\lambda^{m-1} + \cdots + \alpha_0 \cdots \alpha_m,$$

где e_j обозначают (как принято в соответствующей литературе, см. [7], стр.19-21) элементарные симметрические многочлены от переменных α_i. Указанные редукции симметрических многочленов от (α_i, β_i) отражают некоммутативность умножения матриц в основной формуле (1.3) данной лекции.

In the theory of symmetric functions, the number of variables is usually irrelevant, provided only that it is large enough, and it is often more convenient to work with symmetric functions in infinitely many variables (J.Macdonalds.p18)

The generating function for elementary symmetric многочленов $e_r,\ r \geq 0,\ e_0 = 1$ is

$$E(t) = \sum_{r \geq 0} e_r t^r = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i t), \quad H(t) = \sum_{r \geq 0} h_r t^r = \prod_{i \geq 1} (1 - x_i t)^{-1}.$$

The generating function for $p_r = m_{(r)} = \sum x_i^r,\ r \geq 1$ is

$$P(t) = \sum_{r \geq 1} t^{r-1} p_r = \sum_{i \geq 1} \sum_{r \geq 1} x_i^r t^{r-1} = \sum_{i \geq 1} \frac{x_i}{1 - x_i t} = \frac{H'(t)}{H(t)} \ \Rightarrow\ n h_n = \sum_{r=1}^{n} p_r h_{n-r}$$

And one obtains

$$\textbf{Newton:} \quad n e_n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} p_r e_{n-r}.$$

2 ЛЕКЦИЯ 2: Коммутационные соотношения.

Для вывода "интегрируемых" нелинейных уравнений типа цепочки Тода полезным оказывается следующее дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{d}{dt} B_n = V_{n+1} B_n - B_n V_n. \tag{2.1}$$

В левой части этого уравнения производная напоминает своими алгебраическими свойствами коммутатор, и в силу известного правила Лейбница, мы получаем для произведений $C_n = B_{n+1} B_n$ решений рассматриваемого уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} C_n &= \left(V_{n+2} B_{n+1} - B_{n+1} V_{n+1}\right) B_n + B_{n+1} \left(V_{n+1} B_n - B_n V_n\right) = \\ &= V_{n+2} \left(B_{n+1} B_n\right) - \left(B_{n+1} B_n\right) V_n = V_{n+2} C_n - C_n V_n. \end{aligned}$$

Поэтому, например в $\mathbb{Z}_2$ периодическом случае ($i.e. V_{n+2} = V_n, \ \forall \ n \in \mathbb{Z}$), уравнение (2.1) даёт

$$\frac{d}{dt} C_n = V_n C_n - C_n V_n \ \Rightarrow \ \frac{d}{dt} \operatorname{tr}(B_{n+1} B_n) = 0. \tag{2.2}$$

Это позволяет при помощи Теоремы 1 из прошлой лекции строить первые интегралы и законы сохранения $\mathbb{Z}_N$ редукций рассматриваемых уравнений, которые превращают бесконечную цепочку уравнений (2.1) в конечную систему уравнений для элементов матриц с номерами $n \in [N]$:

$$B_1, \ B_2, \ \ldots, B_N; \quad (B_{-1} \equiv B_{N-1}, \ B_0 \equiv B_N, \ B_{N+1} \equiv B_1, \ldots). \tag{2.3}$$

Дополнительный закон сохранения рассматриваемых уравнений не связанный с условием перидичности, получается из красивой формулы для логарифмической производной определителя:

$$\frac{d}{dt} \log \det B(t) = \operatorname{tr} \left(\dot{B} \cdot B^{-1} \right)(t). \tag{2.4}$$

Здесь $\dot{B} = dB(t)/dt$ и для решений B_n матричного уравнения из этой формулы получаем

$$(2.1) \ \Rightarrow \ \frac{d}{dt} \log \det B_n = \operatorname{tr} \left(V_{n+1} - B_n V_n B_n^{-1} \right) = \operatorname{tr}(V_{n+1} - V_n). \tag{2.5}$$

Уравнениям аналогичным уравнениям цепочки Тоды (см. ниже) соответствует следующий выбор матриц B_n и V_n в уравнении (2.1):

$$V_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} k & u_n(t) \\ v_n(t) & -k \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{bmatrix} a_n(t, \lambda) & b_n(t) \\ c_n(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad a_n(t, \lambda) = \lambda + \alpha_n(t). \tag{2.6}$$

Здесь зависимость $a_n = \lambda + \alpha_n$ (ср ?) от дополнительного спектрального параметра λ является существенной и позволяет выразить в явном виде элементы матриц V_n через элементы матриц B_n (ср. (1.1)). Действительно переписав поэлементно уравнения (2.1) мы получаем, обозначая как и выше точками производные по $t \in \mathbb{R}$, что

$$\begin{cases} \dot{a}_n = u_{n+1} c_n - b_n v_n \\ b_n v_{n+1} = c_n u_n \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{b}_n = \lambda b_n - u_n(\lambda + \alpha_n) \\ \dot{c}_n = (\lambda + \alpha_n) v_{n+1} - \lambda c_n \end{cases}, \quad \begin{cases} 2k = \lambda \\ u_n = b_n, \ v_n = c_{n-1} \end{cases}. \tag{2.7}$$

Откуда приравнивая коэффициенты при λ находим, что $u_n = b_n, \ v_n = c_{n-1}$ и, обозначив, как и в прошлой лекции, $\beta_n = b_n c_{n-1} = u_n v_n$, получаем окончательно следующие уравнения

$$\dot{\alpha}_n = \beta_{n+1} - \beta_n, \quad \dot{\beta}_n = \beta_n(\alpha_{n-1} - \alpha_n). \tag{2.8}$$

Исключение α_n из этой системы уравнений первого порядка даёт цепочку уравнений второго порядка

$$\frac{d^2}{dt^2} \log \beta_n = \beta_{n+1} + \beta_{n-1} - 2\beta_n, \tag{2.9}$$

которая совпадает с одномерной редукцией уравнений (0.1) цепочки Дарбу-Лапласа с точностью до обозначений.

Бесконечную цепочку уравнений (2.7) можно превратить в конечномерную динамическую систему, добавив к ней условия периодического замыкания $n \in \mathbb{Z}_N, \ N > 1$. Для того, чтобы использовать Теорему 1 из прошлой лекции, мы заменяем в основной формуле (1.3) при $m = N - 1 > 0$, [3]

$$a_n = \lambda + \alpha_n, \quad b_n c_{n-1} = \beta_n; \quad (\beta_0 = b_0 c_m = b_N c_{N-1} = \beta_N) \tag{2.10}$$

[3]с учётом нумерации $\mathbb{Z}_N-$редукции указанной в формуле (2.3)

и определяем многочлен степени N (ср. (**??**))

$$G_N(\lambda) = \lambda^N + g_1\lambda^{N-1} + \dots + g_N, \quad g_1 = \alpha_1 + \dots \alpha_N, \tag{2.11}$$

коэффициенты которого вычисляются по явным формулам Теоремы 1 начиная с g_1. В силу этих явных формул коэффициенты $g_j,\ j \in [N]$ являются обобщённо однородными многочленами от $2N$ динамических переменных α_j и β_j. В частности при $N = 2$ и $N = 3$ мы, соответственно, находим

$$\begin{gathered} G_2 = \lambda^2 + (\alpha_1+\alpha_2)\lambda + \alpha_1\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2, \quad G_3 = \lambda^3 + (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\lambda^2 + \\ (\alpha_2\alpha_1 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_3\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3)\lambda + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_2. \end{gathered} \tag{2.12}$$

В общем случае условие $N-$периодичности (2.3) позволяет перейти от уравнения (2.1) к уравнению вида (2.2) для упорядоченного произведения N элементарных сомножителей:

$$C = B_N B_{N-1} \cdots B_1$$

Как уже отмечалось в силу уравнения $\dot C = [C, V]$ коэффициенты $g_j,\ j \in [N]$ многочлена (2.11) являются первыми интегралами динамической системы (2.8) порядка $2N$. В частности при $N = 3$ $\mathbb{Z}_3-$редукция уравнений (2.8) даёт следующую динамическую систему 6-го порядка:

$$\begin{cases} \dot\alpha_1 = \beta_2 - \beta_1, \quad \dot\alpha_2 = \beta_3 - \beta_2, \quad \dot\alpha_3 = \beta_1 - \beta_3 \\ \dot\beta_1 = \beta_1(\alpha_3 - \alpha_1),\ \dot\beta_2 = \beta_2(\alpha_1 - \alpha_2),\ \dot\beta_3 = \beta_3(\alpha_2 - \alpha_3). \end{cases}$$

Три первых интерала $g_j,\ j \in [3]$ указаны в формуле (2.12). Кроме того для понижения порядка можно использовать дополнительный первый интеграл $\beta_1\beta_2\beta_3 = \mathrm{const}$.

Таким образом условия периодичности (2.3) позволяют заменить бесконечную цепочку (2.9) конечной системой дифференциальных уравнений, обладающей широким набором первых интегралов, которые можно использовать при фактического интегрирования этих уравнений и, в частности, для понижения порядка системы.

2.1 Цепочки Тоды.

При дополнительном условии $\det B_n = 1$ (ср. (2.5)) уравнения (2.7) дают $c_n = -e^{-q_n}$, $b_n = e^{q_n}$, $a_n = \lambda - \dot q_n$, что приводит нас к уравнениям

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = \exp(q_{n+1} - q_n) - \exp(q_n - q_{n-1}), \tag{2.13}$$

которые носят название цепочки Тоды. Цепочку Тоды можно рассматривать как модель, описывающую систему материальных точек q_j на прямой, связанных пружинками, а переменная t играет роль времени. Обобщение уравнений (2.13) представим в следующем виде

$$\ddot q_n = R(\dot q_n)\left(g(q_{n+1} - q_n) - g(q_n - q_{n-1})\right), \quad g' = \varepsilon_0 g^2 + \varepsilon_1 g + \varepsilon_2 \tag{2.14}$$

где функция $g \equiv g(y)$ является решением уравнения Риккати с произвольными постоянными коэффициентами. $\varepsilon_j \in \mathbb{C}$. Аналогом $\mathcal{S} = \int L(\dot q, q)dt$ интеграла действия (см. следующий раздел) из классической механики является формальное выражение

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n\right) dt, \qquad L_n = K(\dot q_n) - U(q_{n+1} - q_n). \tag{2.15}$$

В случае цепочки Тоды (2.13), соответствующая вариационная задача записывется в виде

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2}\dot q_n)^2 + \exp(q_n - q_{n-1})\right] dt = 0.$$

Определение (file Глава 3.tex:12.12):. Цепочка уравнений (2.14) называется обобщённой цепочкой Тоды, если эти уравнения совместны с дифференцированием D_τ следующего вида

$$D_\tau(q_n) = R(\dot q_n)\left(g(q_{n+1}-q_n)+g(q_n-q_{n-1})\right) + c\,\dot q_n^2, \quad c \in \mathbb{C} \tag{2.16}$$

Теорема 1(2). Обобщённые цепочки Тоды исчерпываются следующим списком

$$\begin{array}{rcll}
\ddot q_n &=& e^{q_{n+1}-q_n} - e^{q_n-q_{n-1}}, \qquad (c=1) & (\mathrm{T}_1)\\
\ddot q_n &=& \dot q_n(q_{n+1}-2q_n+q_{n-1}), \qquad (c=0) & (\mathrm{T}_2)\\
\ddot q_n &=& \dot q_n(e^{q_{n+1}-q_n} - e^{q_n-q_{n-1}}), \quad (c=1) & (\mathrm{T}_3)\\
\ddot q_n &=& (\mu-\dot q_n^2)(\mathrm{th}[q_{n+1}-q_n]-\mathrm{th}[q_n-q_{n-1}]), \quad (c=0) & (\mathrm{T}_4)\\
\ddot q_n &=& (\mu-\dot q_n^2)\left(\dfrac{1}{q_{n+1}-q_n}-\dfrac{1}{q_n-q_{n-1}}\right), \qquad (c=0). & (\mathrm{T}_5)
\end{array}$$

Схема доказательства. ◀ Уравнения цепочки (2.14) и формуда (2.16) позволяют определить два дифференцирования D_t и D_τ в бесконечном наборе "свободных" динамических переменных

$$\dot q_n,\ q_n,\ \dot q_{n\pm1},\ q_{n\pm1},\ \dot q_{n\pm2},\ q_{n\pm2},\dots$$

При этом

$$D_t(q_n)=\dot q_n, \quad D_t(\dot q_n) = F_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} F(q_{n+1},q_{n-1},q_n,\dot q_n);$$
$$D_\tau(q_n) = f_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} f(q_{n+1},q_{n-1},q_n,\dot q_n), \quad D_\tau(\dot q_n) \stackrel{\mathrm{def}}{=} D_t(f_n) = \frac{\partial f_n}{\partial q_{n+1}}\dot q_{n+1}+\cdots+\frac{\partial f_n}{\partial \dot q_n}F_n$$

В рассматриваемом случае из условия коммутирования дифференцирований $[D_\tau,\ D_t]=0$ следует уравнение

$$D_\tau(\ddot q_n) = D_\tau(F_n) = D_t^2(f_n), \tag{2.17}$$

которое выполняется только, если сомножитель $R(\dot q_n)$ в уравнениях цепочки (2.14) является многочленом стпени не выше 2 от $\dot q_n$. Остаётся проверить, что с точностью до преобразований $q_n \to \alpha q_n+\beta t+\gamma n$ и $t\to\delta t$ приведённый выше список обобщенных цепочек Тоды исчерпывает, все возможные случаи выполнения уравнения (2.17).▶

В принципе наличие второго дифференцирования D_τ позволяет рассматривать решения обобщённых цепочек Тоды как функции с двумя независимыми переменными t и τ. Это (см. Лекция 5), существенно расширяет область приложений рассматриваемых уравнений.

Задача 1(2): Пусть

$$\begin{gathered} D_t(q_n)=\dot q_n, \quad D_t(\dot q_n) = \dot q_n(\dot q_{n+1}-\dot q_{n-1}),\\ D_\tau(q_n) = \dot q_n(\dot q_{n+1}+\dot q_{n-1})+\dot q_n^2. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Вывести отсюда следующую автономную систему из двух уравнений с частными производными для $u=q_n(t,\tau)$, $v=q_{n+1}(t,\tau)$:

$$u_\tau+u_{tt} = u_t^2+2u_tv_t, \quad v_\tau - v_{tt} = v_t^2+2u_tv_t.$$

и проверить выполнение условия (2.17) совместности дифференцирований D_t и D_τ из формулы (2.18).

Замечание 1(2). Предлагаемый в Теореме 1(2) альтернативный подход к определению цепочек Тоды обобщается на цепочки соответствующие функционалу (см. обзор [6]):

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n \right) dt, \qquad L_n = K(\dot{q}_n, q_n) + \dot{q}_n \; A(q_{n+1}, q_n) + V(q_{n+1}, q_n). \tag{2.19}$$

Нетрудно проверить (ср. (2.15)), что для рассмотренной выше цепочки Вольтерры (2.18):

$$\ddot{q}_n = \dot{q}_n(\dot{q}_{n+1} - \dot{q}_{n-1}), \quad L_n = \dot{q}_n(\log \dot{q}_n - q_{n+1}). \tag{2.20}$$

2.2 Скобки Пуассона.

Используя различные замыкания цепочки уравнений (2.9) в качестве модели мы рассмотрим в следующей лекции вопрос об интегрируемости системы из $r > 1$ уравнений второго порядка следующего достаточно общего вида:

$$\frac{d^2}{dt^2} \log \beta_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \beta_j, \quad i \in [r], \tag{2.21}$$

с невырожденной матрицей $A = (a_{ij})$. Различный выбор матрицы A позволяет варьировать краевые условия для уравнений (2.9) типа условий закрепления, показанных на рис. 1. В силу условия $\det A \neq 0$ мы можем использовать обратимую замену переменных

$$\log \beta_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} u^j, \quad (\beta_1, \ldots, \beta_r) \leftrightarrow (u^1, \ldots, u^r) = \vec{u} \tag{2.22}$$

для приведения рассматриваемых уравнений (2.21) к виду приспособленному для решения задачи о полиномиальных законах сохранения:

$$\frac{d^2}{dt^2} u^i = e_i = \exp \hat{u}^i, \quad \hat{u}^i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{r} a_{ij} u^j, \quad i \in [r]. \tag{2.23}$$

В дальнейшем мы наложим на матрицу A дополнительные условия, но сначала мы изложим главные принципы общей теории интегрируемости динамических систем связанные с опытом накопленным при решении аналогичных задач в классической механике.

Определенная инвариантность уравнений движения относительно замен переменных достигается путем введения понятия вариационной производной и записи уравнений в виде уравнений Лагранжа-Эйлера. В простейшем скалярном случае $q(t) \in \mathbb{R}$ это дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}(L_{\dot{q}}) - L_q \equiv \ddot{q} L_{\dot{q}\dot{q}} + \dot{q} L_{\dot{q}q} - L_q = 0, \qquad L = L(\dot{q}, q), \\ E \stackrel{\text{def}}{=} \dot{q} L_{\dot{q}} - L \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt} E(\dot{q}, q) = \ddot{q} L_{\dot{q}} + \dot{q} \frac{d}{dt}(L_{\dot{q}}) - \dot{q} L_q - \ddot{q} L_{\dot{q}} = \dot{q}(\frac{d}{dt}(L_{\dot{q}}) - L_q) = 0. \end{gathered} \tag{2.24}$$

В общем случае при $q \in \mathbb{R}^N$ предполагается что рассматриваемая система дифференциальных уравнений описывается некоторым *действием*

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt, \quad q \doteqdot (q^1, \ldots, q^N), \tag{2.25}$$

где $\dot{q}$ и q, соответственно, обобщённые скорости и координаты точки в *конфигурационном* пространстве $\mathcal{M}$, (или $N-$мерном многообразии $\mathcal{M}$.) Уравнение (2.24) является, является, таким образом, частным случаем общих уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\delta S}{\delta q^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0, \quad i \in [N]. \tag{2.26}$$

При переходе к *гамильтонову формализму* мы вводим в рассмотрение N обобщённых *импульсов*

$$p_i \doteqdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \tag{2.27}$$

и используем их как независимые координаты в $2N-$мерном *фазовом* пространстве с координатами (q^i, p_i).

Замечание. На языке многообразий лагранжиан $L(q, \dot{q})$ является функцией на касательном расслоении к многообразию $\mathcal{M}$, а формула (2.27) определяет компоненты ковариантного вектора (1-формы) и тем саиым определяет кокасательное расслоение к многообразию $\mathcal{M}$.

Если невырожден *гессиан*, образованный коэффициентами

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}$$

то можно построить преобразование Лежандра (по скоростям) рассматриваемой квадратичной формы:

$$H(q,p) := p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q}), \tag{2.28}$$

которое называется *функцией Гамильтона* или гамильтонианом системы. В силу своего определения гамильтониан системы зависит только от обобщенных координат и импульсов. Это можно прокомментировать формулой

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}^i} = p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0,$$

иллюстрирующей свойства преобразования Лежандра.

Рассматривая действие как функционал в фазовом пространстве, мы получаем в силу формулы (2.28):

$$S[q,p] = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(p_i \dot{q}^i - H(q,p)\right), \quad \frac{\delta S}{\delta q^i} == -\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad \frac{\delta S}{\delta p_i} = \dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p^i}. \tag{2.29}$$

Отсюда следует, эквивалентность системы уравнений

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \tag{2.30}$$

уравнениям второго порядка (2.26). Можно убедиться в этом и непосредственным дифференцированием.

Пусть теперь в фазовом пространстве с координатами (q, p) заданы две функции $f(q, p)$ и $g(q, p)$. Определим для них скобку Пуассона

$$[f, g] = \sum \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} \tag{2.31}$$

и заметим, что для первых интегралов

$$\frac{d}{dt}f(q,p) = \sum \frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i + \sum \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i = [f, H] = 0.$$

Легко видеть теперь, что следствием тождества Якоби

$$[f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] = 0$$

является следующая замечательная

Теорема 2(2). Если известны два интеграла движения f и g гамильтоновой системы (2.30), то их скобка Пуассона $[f,g]$ также является интегралом движения.

Задача 2(2) [10], p.740: Проверить, что $[q^i, p_j] = \delta^i_j$ и что для скобки (2.31) выполняется формула Лейбница:

$$[f, gh] = [f,g]h + g[f,h].$$

Задача 3(2): Найти условия на матрицу A, $\det A \neq 0$, обеспечивающие лагранжевость систем уравнений (2.23) и (2.22). Найти уравнения Эйлера-Лагранжа при

$$L(u,v,u_t,v_t) = \frac{1}{2}a_{11}a_{21}u_t^2 + \frac{1}{2}a_{22}a_{12}v_t^2 + a_{12}a_{21}u_tv_t + a_{21}e_1 + a_{12}e_2,$$
$$e_1 = \exp(a_{11}u + a_{12}v), \qquad e_2 = \exp(a_{21}u + a_{22}v).$$

Проверить, что растяжения и сдвиги:

$$u \to \alpha_1 u + \beta_1, \quad v \to \alpha_2 u + \beta_2, \quad \text{при} \;\; a_{11}a_{22} \neq 0 \tag{2.32}$$

позволяют нормировать диагональные элементы матрицы A и выбрать $a_{11} = a_{22} = -2$.

3 ЛЕКЦИЯ 3: Экспоненциальные системы.

Возвращаемся к системе уравнений (2.23)

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{u} = \exp(A\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^r)$$

моделирующей "допустимые" условия замыкания бесконечной системы уравнений цепочки Тоды (2.13). Ясно, что свойства рассматриваемой редуцированной системы дифференциальных уравнений зависят от выбора краевых условий. Например, при $N = 3$ можно сравнить следующие две матрицы A и $\widetilde{A}$. Первая из них A соответствует, как нетрудно убедиться условиям $\beta_0 = \beta_3 = 0$ задачи Дирихле:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Вторая матрица $\widetilde{A}$, отвечающая периодическим условиям (2.3) является очевидно вырожденной[4]. Другими словами вырождение снимается при переходе от условий периодичности к

[4]это верно также при $N > 3$

более жёстким граничным условиям типа условий задачи Дирихле и нас интересует именно этот второй случай.

Мы рассматриваем условия, при выполнении которых конечная система дифференциальных уравнений второго порядка (2.23), заданная матрицей A, обладает нужным для интегрируемости запасом полиномиальных законов сохранения следующего вида

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sum C_\alpha \mathbf{u}_1^{\alpha_1}\mathbf{u}_2^{\alpha_2}\cdots\mathbf{u}_m^{\alpha_m}\right] = 0, \quad \deg \stackrel{\text{def}}{=} |\alpha_1| + 2|\alpha_2| + \dots m|\alpha_m| = m, \tag{3.2}$$

где нижний индекс обозначает порядок дифференцирования по t. Другими словами порядок производных заменяет здесь номер в наборе динамических переменных использованном в предыдущих лекциях.

Лемма 1(3). Пусть $\det A \neq 0$. Тогда экспоненциальная система уравнений (2.23) обладает законом сохранения (3.2) второго порядка $m = 2$, в том и только в том случае, если существует диагональная матрица $\alpha = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ симметризующая $A : (\alpha A)^\intercal = \alpha A$.

◀ В случае симметричной матрицы $A^\intercal = A$ нетрудно проверить, что $\dot{W}_2 = 0$ при

$$W_2 = \sum_{i=1}^{r}[u_2^i - \frac{1}{2}(u_1^i)^2] - \sum_{i<j} a_{ij}u_1^i u_1^j, \quad \vec{u}_1 = \dot{\vec{u}}, \quad \vec{u}_2 = \ddot{\vec{u}}$$

В общем случае интегрирующим множителем для уравнения с номером $i \in [r]$ в системе из r уравнений второго порядка (2.23) является

$$\alpha_i \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\dot{u}^j \;\Rightarrow\; \alpha_i e_i \frac{d}{dt}\hat{u}^i = \alpha_i \frac{d}{dt} e_i$$

и после суммирования и интегрирования мы находим, что

$$D_t(u_1^i) = e_i, \quad D_t(u_2^i) = \hat{u}_1^i\; e_i;$$
$$W_2 = \sum_{i=1}^{r}[\alpha_i u_2^i + \alpha_{ii}(u_1^i)^2] + \sum_{i<j}\alpha_{ij}u_1^i u_1^j, \quad \alpha_{ii} = \frac{1}{2}\alpha_i a_{ii}, \quad \alpha_{ij} = \alpha_i a_{ij},\; i \neq j. \tag{3.3}$$

Вообще при $m = 2$

$$D_t(W_2) = (b_{11}u_1^1 + b_{12}u_1^2 + \dots + b_{1r}u_1^r)e_1 + (b_{21}u_1^1 + b_{22}u_1^2 + \dots + b_{2r}u_1^r)e_2 + \dots$$

и приравнивая $b_{ij} = 0$ можно проверить, что условие симметризуемости матрицы A является необходимым для равенства $\dot{W}_2 = 0$. ▶

Задача 1(3). Проверить, что при $r = 2$ условие симметризуемости выполнено при $a_{12}a_{21} \neq 0$ и что интеграл W_2 записывается в виде:

$$W_2 = a_{21}u_2 + a_{12}v_2 - a_{12}a_{21}u_1v_1 - \frac{1}{2}\left(a_{11}a_{12}u_1^2 + a_{22}a_{21}v_1^2\right), \tag{3.4}$$

что, учитывая уравнения $u_2 = e_1,\; v_2 = e_2$, эквивалентно классической формуле для гамильтониана (ср. (2.24)):

$$W_2 = a_{21}e_1 + a_{12}e_2 - a_{12}a_{21}\dot{u}\dot{v} - \frac{1}{2}\left(a_{11}a_{12}\dot{u}^2 + a_{22}a_{21}\dot{v}^2\right). \tag{3.5}$$

для уравнений (2.23) в следующих трёх случаях

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

$\boxed{\text{Fulton,Harris,p133,504;[8]}}$

$$\ddot{u}^j = \exp \hat{u}^j, \quad \hat{\mathbf{u}} = A \cdot \mathbf{u}, \quad \det A \neq 0. \tag{3.7}$$

3.1 Матрицы Картана.

Мы рассмотрим условия интегрируемости систем дифференциальных уравнений 4-го порядка вида (**??**) с с произвольной невырожденной матрицей $A = (a_{ij})$ и укажем условия гарантирующие существование двух независимых первых интегралов системы (**??**). переписав её в виде

$$\begin{cases} \ddot{u} = e_1 = \exp \hat{u}, \quad \hat{u} = a_{11}u + a_{12}v, \\ \ddot{v} = e_2 = \exp \hat{v}, \quad \hat{v} = a_{21}u + a_{22}v. \end{cases} \tag{3.8}$$

Замена $\beta_i = \exp(a_{i1}u + a_{i2}v)$, связывающая уравнения (3.8) и (**??**) обратима в случае $\det(a_{ij}) \neq 0$. Переход к экспоненциальным уравнениям (3.8) существенно упрощает построение явных формул для полиномиальных первых интегралов.

Для построения первых интегралов экспоненциальной системы (3.8), мы вводим в рассмотрение специальную алгебру $\mathcal{W}$ произвольных многочленов от так называемых *дифференциальных переменных*

$$u_j, \ v_j, \ j \geq 1, \quad \deg u_j = \deg v_j = j, \tag{3.9}$$

и обозначаем через $D: \ \mathcal{W} \mapsto \mathcal{W}$ *внутреннее дифференцирование алгебры*, определяемое правилом Лейбница и формулами

$$D: \ u_j \to u_{j+1}; \ v_j \to v_{j+1}, \quad \forall j \geq 1. \tag{3.10}$$

Определение 1(2): Полиномиальным W_m-интегралом экспоненциальной системы (3.8) с невырожденной матрицей $A = (a_{ij})$ называется обобщённо-однородный многочлен степени m с постоянными коэффициентами от дифференциальных переменных (3.9) удовлетворяющий уравнению $D_t(W_m) = 0$, где

$$D_t \ : \begin{cases} u_1 \to e_1, \ u_2 \to \hat{u}_1 e_1, \ u_3 \to (\hat{u}_2 + \hat{u}_1^2)e_1, \ldots; \ \hat{u}_j = a_{11}u_j + a_{12}v_j, \\ v_1 \to e_2, \ v_2 \to \hat{v}_1 e_2, \ \ v_3 \to (\hat{v}_2 + \hat{v}_1^2)e_2, \ldots; \ \hat{v}_j = a_{21}u_j + a_{22}v_j. \end{cases} \tag{3.11}$$

Можно доказать, что из определений этих двух дифференцирований (3.11) и (3.10) следует, что[5]:

$$D_t(w) = w^{(1)}e_1 + w^{(2)}e_2 \ \Rightarrow \ D_t[D(w)] = (D + \hat{u}_1)w^{(1)} \cdot e_1 + (D + \hat{v}_1)w^{(2)} \cdot e_2. \tag{3.12}$$

[5]в следующей лекции мы вернёмся к обсуждению коммутационных соотношений (3.12)

Задача 3(2). Проверить формулу (3.12) для мономов степеней 1, 2 и 3. Законность дифференцирования полиномиальных W_m-интегралов следует из формулы (3.12). Тем не менее независимая проверка уравнения $D_t(W_2')=0$ проводится ниже при вычислении коэффициентов интеграла W_3 трерьей степени общего вида.▶

Дифференцируем W_3-многочлен общего вида посредством указанных выше формул (3.11):

$$W_3=\begin{cases}\alpha u_3+\alpha_1u_2u_1+\gamma_1u_2v_1+\gamma_3u_1^2v_1+\alpha_2u_1^3\\ \beta v_3+\beta_1v_2v_1+\gamma_2v_2u_1+\gamma_4v_1^2u_1+\beta_2v_1^3\end{cases}$$

$$D_t:\begin{cases}u_3\to(\hat u_2+\hat u_1^2)e_1,\ u_1u_2\to(u_2+u_1\hat u_1)e_1,\ u_2v_1\to v_1\hat u_1e_1+u_2e_2,\ u_1^2v_1\to 2u_1v_1e_1+u_1^2e_2\\ v_3\to(\hat v_2+\hat v_1^2)e_2,\ v_1v_2\to(v_2+v_1\hat v_1)e_2,\ u_1v_2\to v_2e_1+u_1\hat v_1e_2,\ u_1v_1^2\to v_1^2e_1+2u_1v_1e_2\end{cases}.$$

Отделяя члены с e_1 и e_2 находим два уравнения в $\mathcal{W}$:

$$\alpha(\hat u_2+\hat u_1^2)+\alpha_1(u_2+u_1\hat u_1)+\gamma_1v_1\hat u_1+\gamma_2v_2+2\gamma_3u_1v_1+\gamma_4v_1^2=0$$
$$\beta(\hat v_2+\hat v_1^2)+\beta_1(v_2+v_1\hat v_1)+\gamma_1u_2+\gamma_2u_1\hat v_1+\gamma_3u_1^2+2\gamma_4u_1v_1=0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты этих многочленов получаем следующую линейную систему из 8 уравнений для 10 коэффициентов искомого многочлена W_3:

$$\begin{array}{l}\gamma_2+\alpha a_{12}=\gamma_4+\alpha a_{12}^2+\gamma_1a_{12}=0,\ 2\gamma_3+a_{11}[\gamma_1+a_{12}\alpha]=0,\ \alpha a_{11}+\alpha_1=0\\ \gamma_1+\beta a_{21}=\gamma_3+\beta a_{21}^2+\gamma_2a_{21}=0,\ 2\gamma_4+a_{22}[\gamma_2+a_{21}\beta]=0,\ \beta a_{22}+\beta_1=0\end{array}\tag{3.13}$$

Example 2 В случае $a_{11}=0,\ a_{12}\cdot a_{21}\neq 0$ мы находим из (3.13) что $\gamma_3=\alpha_1=0$ и далее

$$\gamma_1=\gamma_2=-\beta a_{21},\quad \gamma_4=0,\quad \alpha a_{12}=\beta a_{21},\quad \beta a_{22}+\beta_1=0.$$

Это означает, что $W_3=W_2'$. Полагая для простоты $a_{11}=a_{22}=0,\ a_{12}=a_{21}=1$ мы получаем пример экспоненциальной системы, инвариантной при замене $u\leftrightarrow v$, обладающей "единственным" первым интегралы W_2:

$$u_{tt}=e^v,\quad v_{tt}=e^u;\quad W_2=u_2+v_2-u_1v_1\equiv e^u+e^v-u_tv_t.$$

Как уже говорилось, нас интересуют экспоненциальные системы, обладающие двумя независимыми полиномиальными интегралами из алгебры $\mathcal{W}$. Вид уравнений (3.8) не меняется при масштабных преобразованиях (растяжений и сдвигов) искомых функций. Поэтому в случае общего положения мы фиксируем в качестве условия нормировки диагональные элементы $a_{11}=a_{22}=-2$ предполагая, что $a_{11}a_{22}\neq 0$. Это приводит нас к задаче Дирихле с $a_{12}=a_{21}=1$, т.к. полученные выше уравнения (3.13) дают

$$\begin{cases}\gamma_2+\alpha a_{12}=0,\quad \gamma_4+a_{12}(\gamma_1-\gamma_2)=0,\\ \gamma_1+\beta a_{21}=0,\quad \gamma_3+a_{21}(\gamma_2-\gamma_1)=0.\end{cases},\ \begin{cases}a_{11}=a_{22}=-2\\ \gamma_3=\gamma_1-\gamma_2=-\gamma_4\end{cases}.$$

Окончательная формула

$$W_3=u_3+2u_1u_2+v_1u_2+v_1u_1^2-v_3-2v_1v_2-u_1v_2+v_1u_1^2-u_1v_1^2,\tag{3.14}$$

находится при помощи следующих формул не связанных с условиями $a_{12}=a_{21}=1$:

$$D_t(u_3-u_1\hat u_2)=a_{12}[\hat u_1v_1e_1-u_1\hat v_1e_2],\quad D_tu_1^2v_1=u_1^2e_2+2u_1v_1e_1,$$
$$D_t(v_3-v_1\hat v_2)=a_{21}[\hat v_1u_1e_2-v_1\hat u_1e_1],\quad D_tu_1v_1^2=v_1^2e_1+2u_1v_1e_2$$

Рассматриваемая система дифференциальных уравнений является гамильтоновой и построенный дополнительный первый W_3 свидетельствует об интегрируемости системы (3.8) при $a_{12}=a_{21}=1$. Следующее утверждение обобщает полученный выше результат.

Теорема 2(2) Экспоненциальная система (3.8) с невырожденной матрицей $A = (a_{ij})$ нормированной условиями $a_{11} = a_{22} = -2$ интегрируема только в следующих трёх случаях:

Набросок доказательства. ◀ Основным вопросом является выяснение возможных порядков дополнительных первых интегралов W_m. Случай $m = 3$ рассмотрен выше. Случай $m = 4$ приводит к громоздким вычислениям и матрице A_2. Соответствующий первый интеграл можно представить в виде:

$$\begin{gathered} W_4 = u_2^2 + v_2^2 + 4u_2v_2 + 2u_1^2u_2 + 2v_1^2v_2 + u_1^2v_2 + 4v_1^2u_2 - 2u_1v_1(u_2 + 2v_2) + \\ u_1^4 + v_1^4 + 5u_1^2v_1^2 - 2u_1v_1(u_1^2 + 2v_1^2) \end{gathered} \tag{3.15}$$

Для того, чтобы исключить в W_4 дифференциальные переменные (3.11) с номерами $j \geq 3$ система дифференциальных уравнений (3.8) записывалась в следующем, близком к "исходному" (**??**) виду:[6]

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 = u_2(a_{11}u_1 + a_{12}v_1), \quad u_2 = \dot{u}_1 \\ \ddot{v}_1 = v_2(a_{21}u_1 + a_{22}v_1), \quad v_2 = \dot{v}_1. \end{cases}$$

Замена динамических переменных (u, v, u_1, v_1) на (u_2, v_2, u_1, v_1) является очевидно обратимой в силу невырожденности матрицы $A = (a_{ij})$. Случай $m = 5$ оказывается пустым, а случай $m = 6$ приводит к матрице A_3 и дополнительному первому интегралу W_6 шестого порядка. Формула аналогичная (3.15) в этом случае содержит около 50 различных мономов.▶

Заметим, что в случае краевых условий задачи Дирихле и серии матриц аналогичных A_1 (ср. (2.21)):

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad (N = 3) \tag{3.16}$$

можно проследить непосредственную связь полиномиальных W_m-интегралов с формулами для коэффициентов g_j многочлена (2.11) из Лекции 1. Условие существования W_2-интеграла при $N = 3$

$$W_2 = \alpha_1u_2 + \alpha_2v_2 + \alpha_3w_2 + \dots, \quad \alpha_ia_{ij} = \alpha_ja_{ji},\ i \neq j \ \Rightarrow\ a_{12}a_{23}a_{31} = a_{13}a_{32}a_{21} \tag{3.17}$$

эквивалентно симметризуемости матрицы A и гамильтоновости рассматриваемых дифференциальных уравнений. Обобщение Теоремы 2(2) на экспоненциальные системы с $N \times N$ матрицей A и классификация при $(N > 2)$ интегрируемых случаев требует привлечения матриц Картана (см. например [9]). Иначе говоря задачи о классификации интегрируемых условий замыкания цепочки Тоды оказывается близкой к задаче классификации диэдральных групп Кокстера:

3.2 Выбор базиса.

not edited yet: Н.Бурбаки "Группы и алгебры Ли:" (Главы 4-6); Мир, М. 1972.

1. переделать (3.13) в упрощённую форму (3.15) и уточнить в духе Эммы Нётер разницу вычислений в $\mathcal{W}$ и в упрощённом виде

2. матричные u, v и группы отражений для многочленов W_m (диэдральные группы построенные по диаграммам Дынкина.?)

3. in Adler,(papers):

cartan-matrices.pdf

[6]это упрощение позволило В.Э. Адлеру создать компьютерную программу для вычисления W_m

4 ЛЕКЦИЯ 4: Симметрии гиперболических уравнений.

Теорема 1, file Майкоп17апр18 . Гиперболическое уравнение $u_{xy} = f(u)$ обладает симметриями вида (**??**) с $m > 1$ только в следующих трёх случаях:

$$u_{xy} = e^u,\ (L); \quad u_{xy} = e^u + e^{-u},\ (S); \quad u_{xy} = e^u + e^{-2u},\ (T). \tag{4.1}$$

Схема доказательства. Let $v = v(u, u_1, \ldots, u_m), \quad m = 3,\ ?,$ симметрия уравнения $u_{xy} = f(u)$. Переписав определяющее уравнение $D_x D_y v = g(u)v,\ g \equiv f'$ в виде

$$D_x D_y - g(u) = D_x \left[D_y - D^{-1} g(u) \right], \qquad D \equiv D_x,$$

рассмотрим коммутационное соотношение (теорема о формальных симметриях)

$$\begin{gathered}\left[\ [D_y - D^{-1} g, D_t + D^n + a_2 D^{n-2} + a_3 D^{n-3} + \cdots + a_n\right] = a_{2,y} D^{n-2} + a_{3,y} D^{n-3} + \cdots + a_{n,y} + \\ D^{-1} g_t - \left[D^{-1} g, D^n + a_2 D^{n-2} + \cdots + a_n\right] = (a_{2,y} + n g_x) D^{n-2} + (a_{3,y} - n g_{xx}) D^{n-3} + \ldots \\ \left[a D^m, D^{-1} g\right] = (a_x g + m a g_x) D^{m-2} + \ldots, \\ D^{-1} b\ D^m = b D^{m-1} - b_x D^{m-2} + b_{xx} D^{m-3} - b_{xxx} D^{m-4} + \ldots\end{gathered}$$

Мы обсудим далее несколько неожиданные приложения алгебраической схемы построения полиномиальных первых интегралов W_m экспоненциальных гамильтоновых систем следующего вида Отметимм, что роль гамильтониана играет здесь однородный многочлен второй степени $W_2 \in calW$

многочлен для доказательства интегрируемостипостроений предыдущего раздела . Кажется странным, но использованная нами схема применима, без всяких изменений, и к гиперболическим уравнениям с частными производными:-двумерными двойникам этих экспоненциальных систем [7]:

$$u^j_{xy} = \exp \hat{u}^j,\ j \in [N], \quad \hat{\mathbf{u}} = A \cdot \mathbf{u}, \quad (\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^N)^\intercal,\ \det A \neq 0). \tag{4.2}$$

В частности при $N = 2$ подставив D_y вместо D_t и D_x вместо D мы убеждаемся в справедливости коммутационных соотношений (3.12) и формул Леммы 1 для гиперболической системы уравнений вида (4.2):

$$\begin{cases} u^1_{xy} = e_1 = \exp \hat{u}^1, & \hat{u}^1 = a_{11} u^1 + a_{12} u^2, \\ u^2_{xy} = e_2 = \exp \hat{u}^2, & \hat{u}^2 = a_{21} u^1 + a_{22} u^2. \end{cases} \tag{4.3}$$

В частности полагая $a_{11} = a_{22} = -2$ и возвращаясь временно к упрощённым обозначениям $u^1 = u,\ u^2 = v$ мы находим, как и в предыдущем разделе, что

$$\begin{aligned} D_y(u_3 + 2u_1 u_2 - a_{12} u_1 v_2) &= a_{12}[\hat{u}_1 v_1 e_1 - u_1 \hat{v}_1 e_2], \quad D_y u_1^2 v_1 = u_1^2 e_2 + 2u_1 v_1 e_1, \\ D_y(v_3 + 2v_1 v_2 - a_{21} v_1 u_2) &= a_{21}[\hat{v}_1 u_1 e_2 - v_1 \hat{u}_1 e_1], \quad D_y u_1 v_1^2 = v_1^2 e_1 + 2u_1 v_1 e_2, \end{aligned}$$

где $u_1 = u_x,\ v_1 = v_x,\ u_2 = u_{xx},\ v_2 = v_{xx}$ и т.д. Как мы знаем из предыдущего раздела из этих формул при $a_{12} = a_{21} = 1$ следует, что $D_y(W_3) = 0$ где дифференциальный многочлен W_3 определяется формулой (3.14). Мы покажем в частности, что первые интегралы рассматриваемых двумеризованных экспоненциальных систем (4.2) позволяют достаточно просто построить симметрии этих гиперболических уравнений в виде уравнений, описывающие совместную

[7] первоначально эта схема применялась именно к уравнениям с двумя независимыми переменными (см. [11])

с (4.2) эволюцию дифференциальных переменных (3.9) записываемую в виде дополнительного уравнения с частными производными:

$$D_\tau(\mathbf{u_1}) = D_x V(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_m}), \quad m \geq 2. \tag{4.4}$$

В качестве первого примера мы покажем, что симметрией уравнение Лиувилля, которое соответствуе $N = 1$ в рассматриваемой иерархии систем вида (4.2), является известное уравнение Кортевега–де Фриза. На этом примере можно проследить как изменяется, при переходе в двумерие, каноническая взаимосвязь гамильтоновых векторных полей с первыми интегралами из классической теории Гамильтона-Якоби.

Example 3 Уравнение Лиувилля соответствует скалярной редукции $u^1 = u^2 = u$ экспоненциальной системы (4.3). Эта редукция зануляет (т.к. $u = v$) дифференциальный многочлен (3.14) и мы получаем (ср. Лемма 1(2)):

$$u_{xy} = e^{-u}, \quad D_y(W_2) = 0, \quad W_2 = u_{xx} + \frac{1}{2}u_x^2 = 0. \tag{4.5}$$

Симметриями (4.5) мы называем (формальное определение приводится ниже функцию $V(u_1, u_2, \ldots)$ $\mathcal{W}$ удовлетворяющую линеаризации (4.5) на фоне "заданного" решения u уравнения Лиувилля:

$$D_x D_y(V) + e^{-u}\ V = 0.$$

Имеем

$$\Phi_1 = u_3 - \frac{1}{2}u_1^3 \ \Rightarrow\ D_x D_y \Phi_1 = D_x\left[e^u(u_2 - \frac{1}{2}u_1^2)\right] = e^u(u_3 - \frac{1}{2}u_1^3) = e^u \Phi_1,$$

т.к. $D_y u_1 = D_y D_x u = e^u$, $D_y u_2 = e^u u_1$, $D_y u_3 = e^u(u_2 + u_1^2)$ и т.д. Аналогично можно проверить, что решениями симметрийного уравнения (4.8) для уравнения Лиувилля являются

$$\Phi_2 = u_4 - u_2^2 - u_1^2 u_2, \quad \Phi_3 = 2u_4(u_3 - u_1 u_2) - u_1 u_3^2 - 2u_2^2 u_3 + 2u_1 u_2^3 + u_1^3 u_2^2,$$

причём эволюционное уравнение $D_3(u) = \Phi_3$ является следствием пары уравнений $D_j(u) = \Phi_j,\ j = 1,\ 2$ в том смысле, что дифференцирование $D_3 \sim [D_1, D_2]$ совпадает с коммутатором дифференцирований D_1 и D_2 с точностью до коэффициента.

not edited yet: XY17, Майкоп17, Соколов17

4.1 Элементы дифференциальной алгебры

Principal derivation

$$[\text{p.6}:\ D \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} + u_1 \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{\infty} u_{i+1} \frac{\partial}{\partial u_i} \tag{4.6}$$

generates all independent variables u_i starting with $u_0 = u$. p16: It is a formalization of the total $x-$derivative which acts on functions of the form $g(x, u_x, u_{xx}..)$ The infinite-dimensional vector-field

$$D_F = F\frac{\partial}{\partial u_0} + D(F)\frac{\partial}{\partial u_1} + D^2(F)\frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots \tag{4.7}$$

is associated with evolution equation. This vector-field commutes with D_x

Определение 2. **Симметриями** уравнения в частных производных $F(D^\alpha u) = 0$ называются решения уравнения в вариациях $V([u]),\ F_*(V) = 0$, где:

$$F_*(v) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F[u+\varepsilon v] - F[u]}{\varepsilon}; \quad u,\ v\ \in C^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{4.8}$$

Квадратные скобки $[u]$ обозначают здесь конечный набор частных производных $D^\alpha(u)$ функции $u(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ и формула $v \in \ker F_*$ определяет "касательную плоскость," связанную с дифференциальными следствиями рассматриваемого уравнения $F(D^\alpha u) = 0$.

$$v = (D_x + u_x)W, \quad D_y W = 0\ \Rightarrow\ [D_x D_y - e^u]v = 0, \quad v \in \ker F_*.$$

1(3): Проверить, что для дифференциальных функций $f \in \mathcal{F}$, не зависящих от x

$$D_x(f) = f_*(u_1)$$

Example 4 Пусть $r = 2$ и нарушено условие невырожденности $a_{12}a_{21} \neq 0$. Положим для простоты $a_{12} = a_{21} = 0$. Тогда

$$\ddot{u} = e^v,\ \ddot{v} = e^u, \quad H = u_2 + v_2 - u_1 v_1\ \Rightarrow\ H_x = u_3 - u_1 v_2 + v_3 - v_1 u_2.$$

Несовместность двух простых формул:

$$\begin{cases} D_y(u_{m+1} - u_1 v_m) = m e_1 v_1 v_{m-1} - e_2 u_1 u_{m-1} + \ldots \\ D_y[a u_1^2 + b u_1 v_1 + c v_1^2] = e_1(2a u_1 + b v_1) + e_2(b u_1 + 2c v_1) \end{cases}$$

приводит, как нетрудно проверить, к невозможности построения следующих сразу за старшими членов однородного многочлена $W^1_{m+1} = u_{m+1} - u_1 v_m + f(u_1, v_1)u_{m-1} + g(u_1, v_1)v_{m-1} + \ldots$ для всех $m > 3$. Это означает не существование $y-$интегралов отличных от гамильтониана и его производных.

Example 5 Для модельного уравнения нелинейных волн

$$F \equiv u_t - u u_x = 0, \quad F_*(v) = (D_t - u_x - u D_x)v = 0, \tag{4.9}$$

где

$$v([u]) = v(u, u_1, \ldots, u_m); \quad D_x:\ \ u \mapsto u_1 \mapsto u_2 \mapsto \ldots \mapsto u_k \mapsto \ldots\ ,$$

мы находим в ядре линейного оператора F_* первого порядка

$$v(u, u_1, u_2) = \frac{u_2}{u_1^2} + u^2 u_1.$$

Поэтому решениями симметрийного уравнения (см. определение выше) являются произвольные функции от $v,\ v_1 = v_x,\ \ldots$. Имеется здесь и серия законов сохранения с плотностями $\rho_n = u^n$

$$D_t(u^n) = n u^n u_x = \frac{n}{n+1} D_x(u^{n+1}), \quad n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

С другой стороны в результате обратимой замены переменных, называемой иногда преобразования годографа $\hat{x} = u,\ \hat{u} = x$, мы получаем

$$\begin{gathered} \hat{x} = u, \quad \hat{u} = x, \quad \hat{t} = t; \quad d\hat{x} = u_x dx + u_t dt,\ d\hat{u} = dx,\ d\hat{t} = dt, \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} = \frac{d\hat{u}}{d\hat{x}}\Big|_{d\hat{t}=0} = \frac{1}{u_x}, \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} = \frac{d\hat{u}}{d\hat{t}}\Big|_{d\hat{x}=0} = -\frac{u_t}{u_x}\ \Rightarrow\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} = \hat{x}. \end{gathered} \tag{4.10}$$

Таким образом уравнение (4.9) превратилось в линейное и после его решения формулы (4.10) и теорема о неявной функции дают:

$$u_t = uu_x \;\Leftrightarrow\; \varphi(u) = x - ut,$$

где функция $\varphi(u)$ произвольна.По крайней мере локально это позволяет удовлетворить начальным условиям $u|_{t=0} = f(x)$ задачи Коши за счёт выбора функции φ.

5 ЛЕКЦИЯ 5: Иерархия НШ.

Возвращаясь к коммутационным соотношениям Лекции 2 мы рассмотрим здесь связь уравнений аналогичных (2.2) и (2.1) в случае спектральной задачи $\Psi_x = V(x,k)\Psi$, где (ср. (2.6)):

$$V = \begin{bmatrix} k & u \\ v & -k \end{bmatrix} = k\sigma + \begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

а Ψ обозначает 2×2 матрицу Вронского, столбцы которой являются решениями системы дифференциальных уравнений:

$$\psi^1_x - k\psi^1 = u\psi^2, \quad \psi^2_x + k\psi^2 = v\psi^1, \quad k \in \mathbb{C}; \qquad \left(\frac{d}{dx}\vec{\psi} = V(x,k)\vec{\psi}\right). \tag{5.2}$$

Аналог уравнения (2.1) записывается в виде

$$\frac{d}{dx}Q = \hat{V}(x,k)\; Q - Q\; V(x,k), \tag{5.3}$$

где V и $\hat{V}$ обозначает потенциал вида (5.1) до и после преобразования, соответственно:

$$\hat{\Psi} = Q\Psi \;\Rightarrow\; Q_x = \hat{V}Q - QV.$$

Решения уравнения (5.3) предполагаются полиномами по спектральному параметру и мы называем их в этом случае матрицами Дарбу. *Элементарное* преобразование соответствует матрице Дарбу Q следующего вида:

$$\hat{\Psi} = Q\Psi, \quad Q(x,k) = (k-\alpha)P(x) + (k-\beta)(E - P(x)), \quad P^2 = P. \tag{5.4}$$

Проектор P однозначно определяется здесь двумя подпространствами:

$$\ker Q|_{k=\alpha} = \operatorname{Im} P = M, \quad \ker Q|_{k=\beta} = \ker P = N$$

которые должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{d}{dx}M(x) = V(x,\alpha)M(x), \quad \frac{d}{dx}N(x) = V(x,\beta)N(x). \tag{5.5}$$

Нетрудно проверить, что определитель матрицы Дарбу (5.4) не зависит от x, и что

$$Q_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} (k-\alpha)P + (k-\beta)(E-P) \;\Rightarrow\; Q_{\alpha\beta}Q_{\beta\alpha} = (k-\alpha)(k-\beta)I, \tag{5.6}$$

где I-единичная матрица.

Аналог уравнения (2.2) из Лекции 2 записывется в виде

$$\frac{d}{dx}B = V(x,k)\ B - B\ V(x,k), \tag{5.7}$$

но уже не сводится к частному случаю (5.3) т.к., в отличие от (5.3), полиномиальные решения этого уравнения существуют только в исключительных случаях (см. ниже ??). Отказавшись от требования полиномиальности мы построим решение (5.7) в виде специального ряда по обратным степеням спектрального параметра k:

$$B = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{k^n}. \tag{5.8}$$

Коэффициенты этого формального ряда однозначн выражаются через $u,\ v$ и их производные при помощи уравнения Риккати, связанного с (5.2):

$$f_x + f^2 v - 2kf = u, \quad f = \frac{\psi^1}{\psi^2}. \tag{5.9}$$

Найденные при помощи уравнений (5.7) и (5.9) формулы используются для построения коммутирующих друг с другом дифференцирований $D_n,\ n = 1,\ 2,\ \dots$ в пространстве функций $\mathcal{F}$ от дифференциальных переменных (u, v) :

$$\begin{cases} D_1(u) = u_x \\ D_1(v) = v_x \end{cases}, \quad \begin{cases} D_2(u) = u_{xx} - 2u^2 v \\ D_2(v) = -v_{xx} + 2uv^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} D_3(u) = u_{xxx} - 6uvu_x \\ D_3(v) = v_{xxx} - 6uvv_x \end{cases}, \dots \tag{5.10}$$

Дифференциальные переменные (u, v) с их производными по x заменяют здесь динамические переменные Лекции 2 зависящие от дискретной переменной n (см. Теорема 1(2)).

5.1 Уравнение Риккати.

Замена линейных уравнений (5.2) скалярным уравнением (5.9) с квадратичной нелинейностью позволяет выделить единственное решение представимое в виде следующего формального ряда по обратным степеням спектрального параметра k.

$$f(x,k) = \frac{f_1(x)}{2k} + \frac{f_2(x)}{4k^2} + \frac{f_3(x)}{8k^3} \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j}{\lambda^j}, \quad \lambda \equiv 2k. \tag{5.11}$$

Подстановка в уравнение Риккати (5.9) этого формального ряда *однозначно* определяет все коэффициенты $f_j(x)$ в терминах дифференциальных переменных (ср. Лекцию 4) и мы получаем

$$\begin{gathered} f_1 = -u, \quad f_2 = -u_x, \quad f_3 = u^2 v - u_{xx}, \quad f_4 = v_x u^2 + 4uvu_x - u_{xxx}, \\ f_5 = f_{4,x} + v\left[2f_1 f_3 + f_2^2\right] = -u_4 + 6uvu_2 + u^2 v_2 + 5u_1^2 v + 6u_1 v_1 u - 2u^3 v^2. \end{gathered} \tag{5.12}$$

Производные коэффициентов $f_j(x)$ по x вычисляются здесь при помощи оператора

$$D_x = \mathbf{u}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{u}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_1} + \dots, \qquad \mathbf{u} \equiv (u, v), \tag{5.13}$$

переводящего $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}_{n+1} = D_x(\mathbf{u}_n)$. При этом уравнение (5.9), рассматриваемое в классе формальных степенных рядов (5.11), сводится к рекуррентной формуле

$$\begin{gathered} f_{n+1} = f_{n,x} + v \sum_{i+j=n} f_i f_j, \quad f_1 = -u \ \Rightarrow\ f_n \in \mathcal{F}, \\ \deg u = \deg v = 1, \quad \deg u_j = \deg v_j = j+1 \ \Rightarrow\ \deg f_n = n \end{gathered} \tag{5.14}$$

из которой следует, что коэффициенты f_j ряда (5.11) являются однородными дифференциалными многочленами в пространстве $\mathcal{F}$. Таким образом мы переходим в рассматриваемых уравнениях от функций независимого переменной x к многочленам от дифференциальных переменных (u, v). Связь между формулами типа (5.14) и решениями уравнения (5.7) в пространстве $\mathcal{F}$ устанавливает следующая теорема:

Теорема 1(5). Общее решение [8] матричного уравнения (5.7) в виде ряда (5.8) с коэффициентами $B_n \in \mathcal{F}$, $n = 0,\ 1,\ \ldots$ допускает представление

$$B = F\beta F^{-1}, \quad \beta \equiv \operatorname{diag}\beta, \quad \beta_x = 0 \tag{5.15}$$

где ряд

$$F = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{\lambda^n}, \quad F_n \in \mathcal{F}, \quad \deg F_n = n, \tag{5.16}$$

однозначно определяется следующим матричным уравнением Риккати:

$$F_x + F\ F^d = V(x,k)F, \quad F = (f_{ij}), \quad f_{ii} = 1; \qquad F^d \equiv \operatorname{diag} F^d. \tag{5.17}$$

◀ Легко проверить, что матричное уравнение (5.17) сводится в случае (5.1) к следующей паре уравнений Риккати (ср. (5.9)):

$$\frac{df_{21}}{dx} + uf_{21}^2 + \lambda f_{21} = v, \qquad \frac{df_{12}}{dx} + vf_{12}^2 - \lambda f_{12} = u; \quad (\lambda = 2k) \tag{5.18}$$

для недиагональных элементов f_{21} и f_{12} матрицы F. Действительно, т.к. $f_{11} = f_{22} = 1$ то

$$F = \begin{pmatrix} 1 & f_{12} \\ f_{21} & 1 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ VF = \begin{pmatrix} uf_{21} + k & u + kf_{12} \\ v - kf_{21} & vf_{12}u - k \end{pmatrix}$$

и, приравнивая диагональные элементы в уравнении (5.17), находим, что

$$F^d = \operatorname{diag}(k + g_1, -k + g_2), \quad g_1 = uf_{21},\ g_2 = vf_{12}. \tag{5.19}$$

Антидиагональные элементы дают теперь пару скалярных уравнений Риккати (5.18) для f_{21} и f_{12}, соответственно.

Дифференцируя равенство $F^{-1}F = I$ мы находим, что

$$\left(F^{-1}\right)_x = F^d F^{-1} - F^{-1}V(x,k) \tag{5.20}$$

Из равенства $\beta F^d = F^d\beta$ следует теперь, что $B = F\beta F^{-1}$ является решением уравнения (5.7) вида (5.8) с $B_0 = \beta = \mathrm{const}$. С другой стороны подстановка произвольного ряда $B(x,k)$ вида (5.8) в это уравнение даёт $[\sigma, B_0] = 0 \ \Rightarrow\ B_{0,x} = 0$. Полагая $\beta = B_0$ мы получаем новое решение $\widetilde{B} = B(x,k) - F\beta F^{-1}$ уравнения (5.7) вида (5.8) с нулевым свободным членом. Возможность умножения построенного решения $F\beta F^{-1}$ на степени спектрального параметра (см. сноску в теореме) завершает доказательство. ▶

Пример 1(5). Полагая $\beta = \operatorname{diag}(1,0)$ и $\widetilde{\beta} = \operatorname{diag}(0,1)$ в формуле (5.15) мы находим, соответственно,

$$B = \frac{1}{1 - f_{12}f_{21}} \begin{pmatrix} 1 & -f_{12} \\ f_{21} & -f_{12}f_{21} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B} = \frac{1}{1 - f_{12}f_{21}} \begin{pmatrix} -f_{12}f_{21} & f_{12} \\ -f_{21} & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.21}$$

где f_{12} и f_{21} являются решениями уравнений Риккати (5.18). Легко видеть, что $B + \widetilde{B} = 0$ и что в случае $B = (b_{ij})$ мы имеем $B^2 = B$:

$$b_{11} + b_{22} = 1, \quad b_{12} = -f_{12}h, \quad b_{21} = f_{21}h, \quad b_{11} = h \overset{\mathrm{def}}{=} (1 - f_{12}f_{21})^{-1}. \tag{5.22}$$

[8] с точностью до скалярных сомножителей не зависящих от x

Упр. 51 Проверить, исходя из (5.18), выполнение в случае (5.22) уравнений

$$\begin{cases} D_x(b_{11}) = ub_{21} - b_{12}v, \\ D_x(b_{22}) = b_{12}v - ub_{21}; \end{cases} \qquad \begin{cases} D_x(b_{12}) = \lambda b_{12} + u(b_{22} - b_{11}), \\ D_x(b_{21}) = -\lambda b_{21} + v(b_{11} - b_{22}). \end{cases} \tag{5.23}$$

эквивалентных (5.7).

Для общей спектральной задачи $\Psi_x = V(x,k)\Psi$ с $r \times r$ матричным потенциалом

$$V(x,k) = k\sigma + \widetilde{V}(x), \quad \sigma = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r), \quad \alpha_i \neq \alpha_j,\ \forall\ i \neq j; \quad \widetilde{V}(x) = ad_\sigma U(x) \tag{5.24}$$

переход при $r \geq 2$ к проективным координатам

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1^1 & \psi_2^1 & \ldots & \psi_l^1 \\ \psi_1^2 & \psi_2^2 & \ldots & \psi_l^2 \\ & & \ldots\ldots & \\ \psi_1^l & \psi_2^l & \ldots & \psi_l^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & f_{12} & \ldots & f_{1l} \\ f_{21} & 1 & \ldots & f_{2l} \\ & & \ldots\ldots & \\ f_{l1} & f_{l2} & \ldots & 1 \end{bmatrix} \mathrm{diag}(\psi_1^1, \psi_2^2, \ldots \psi_l^l) \tag{5.25}$$

приводит нас к обобщённому уравнению (5.17):

$$\frac{d}{dx}F + FF^d = VF, \qquad F^d \stackrel{\mathrm{def}}{=} k\sigma + \mathrm{diag}\left(\sum_{j\neq 1} v_{1j}f_{j1}, \ldots, \sum_{j\neq r} v_{rj}f_{jr}\right). \tag{5.26}$$

Из этого матричного уравнения Риккати находятся (ср. доказательство Теоремы 1), приведённые выше формулы для элементов диагональной матрицы F^d, а также[9] уравнения с квадратичной нелинейностью для недиагональных элементов матрицы $F = (f_{ij})$.

Упр. 52 Найти уравнения для $f_{i1},\ i = 2,\ 3$ при $r = 3$ и

$$V(x,k) = \begin{pmatrix} 0 & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & 0 & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & 0 \end{pmatrix} + k\sigma, \quad \sigma = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \tag{5.27}$$

Формулы (5.21) из Примера 1 обобщаются на случай $r \geq 2$ следующим образом. Пусть

$$B = (b_{ij}) = \frac{\psi \times \varphi}{< \psi, \varphi >}, \quad b_{ij} = \frac{\psi^i \varphi_j}{< \psi, \varphi >} \ \Rightarrow\ B^2 = B, \tag{5.28}$$

где вектор-столбец $\vec{\psi}$ с координатами $\psi^i,\ i \in [r]$ и вектор-строка φ с координатами $\varphi_i,\ i \in [r]$ удовлетворяют, соответственно уравнениям

$$\vec{\psi}_x = V(x,k)\vec{\psi}, \quad \varphi_x + \varphi V(x,k) = 0. \tag{5.29}$$

Поэтому

$$\frac{d}{dx} < \psi, \varphi > = 0, \quad < \psi, \varphi > \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_j \psi^j \varphi_j$$

и $r \times r$ матрица $\widetilde{B} = \psi \times \varphi$ удовлетворяет уравнению $\widetilde{B}_x = [V, \widetilde{B}]$. Знаменатель в этих формулах нужен для того, чтобы её можно было переписать в терминах однозначно определённых решениях f_{ij} уравнений Риккати (5.26). Нетрудно проверить, что при $r = 2$ формулы (5.28) и

[9] однозначно разрешимые в пространстве формальных рядов вида (5.11)

(5.21) совпадают. Имея в виду аналогию с формулами (5.4), приведёнными в начале лекции, мы назывем (5.28) *элементарными* решениями матричного уравнения (5.7). Отметим ещё, что эти решения можно не только складывать, но и перемножать.

Таким образом доказательство Теоремы 1 и формула (5.15), обобщаются с незначительными изменениями на $r \times r$ матричный случай (5.24) и в качесве базиса в пространстве $\mathcal{F}$ решений уравнения (5.7) можно выбирать элементарные решения (5.28), однозначно соответствующие диагональным матрицам в формуле (5.15). Например, при $r = 2$ выбрав $\beta = \frac{1}{2}(1, -1)$ в формуле (5.15) мы получаем

$$\lambda B = V + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} V_n, \quad V_1 = \begin{pmatrix} -uv & u_x \\ -v_x & uv \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} vu_x - uv_x & u_{xx} - 2u^2 v \\ v_{xx} - 2v^2 u & uv_x - vu_x \end{pmatrix}, \dots , \tag{5.30}$$

что, как будет установлено в следующем разделе, соответствует иерархии дифференцирований D_j из формулы (5.10). Сложный вопрос о приложениях Теоремы 1 при $r \geq 3$ и выборе подходящего базиса решений уравнения (5.7) мы рассмотрим в Лекциях 7 и 8 с несколько других точек зрения.

5.2 Коммутирующие векторные поля.

Для степенных рядов аналогичных (5.16) формулы

$$(\lambda^m F)_+ \stackrel{\text{def}}{=} F_0 \lambda^m + F_1 \lambda^{m-1} + F_2 \lambda^{m-2} + \dots + F_m, \quad m > 0.$$

переводят формальный ряд в последовательность связанных с ним многочленов от λ. Например, в случае (5.30) мы находим

$$\begin{gathered} A_n = (\lambda^n B)_+ \;\Rightarrow\; A_1 = \frac{1}{2}\sigma\lambda + \begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & u \\ v & -k \end{pmatrix}, \; (\lambda = 2k), \\ A_2 = \lambda \begin{pmatrix} k & u \\ v & -k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -uv & u_x \\ -v_x & uv \end{pmatrix} = \lambda A_1 + V_1, \quad A_3 = \lambda A_2 + V_2, \dots . \end{gathered} \tag{5.31}$$

Эти многочлены $A_n,\ n > 1$ степени n по λ, наряду с $A_1 = V$ и порждают дифференцирования $D_n,\ n > 1$, о которых говорилось в начале лекции (см. (5.10)). Напомним, что эти дифференцирования действуют на функции вида $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_{xx}..)$ и по определению должны коммутировать с оператором (5.13) полного дифференцирования D_x по "независимой" переменной x, т.е. $D_n(\mathbf{u}_{j+1}) = D_x D_n(\mathbf{u}_j)$. Доказательство следующего утверждения будет приведено в Лекции 8 в более общем виде, охватывающем $r \times r$ матричный случай (5.24).

Лемма 2(5). В случае (5.30) пусть $A_n = (\lambda^n B)_+$ и $D_n(V) = \frac{1}{2} ad_\sigma(V_n)$. Тогда

$$[D_m - A_m,\ D_n - A_n] \equiv D_n(A_m) - D_m(A_n) + A_m A_n - A_n A_m = 0, \tag{5.32}$$

Замечание 1(5) Из коммутационных соотношений Леммы 2 следует, что при всех $n \geq 1$ формальный ряд (5.15) из Теоремы 1 вида:

$$B(\lambda) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\lambda^n}, \quad B_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\sigma}{2} \tag{5.33}$$

удовлетворяет уравнениям $D_n(B) = [A_n, B]$ не только при $n = 1$, но и при всех $n > 1$. В частности при $n = 2$ мы находим, что

$$D_2(B) = A_2B - BA_2, \quad A_2 = \frac{1}{2}\sigma\lambda^2 + \lambda\begin{pmatrix} -uv & u_1 \\ -v_1 & uv \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} vu_1 - uv_1 & u_2 - 2u^2v \\ v_2 - 2v^2u & uv_1 - vu_1 \end{pmatrix}. \tag{5.34}$$

где нижние индексы у дифференциальных переменных (u, v) заменяют порядок $x-$производной, но могут использоваться и независимо от их первоначального смысла.

Следствие 3(5) леммы. Формальные ряды для элементов b_{12} и b_{21} матрицы (5.33)

$$\lambda b_{12} = u + \frac{u_x}{\lambda} + \frac{D_2(u)}{\lambda^2} + \frac{D_3(u)}{\lambda^3} + \ldots, \quad \lambda b_{21} = v - \frac{v_x}{\lambda} - \frac{D_2(v)}{\lambda^2} - \frac{D_3(v)}{\lambda^3} + \ldots \tag{5.35}$$

являются производящими функциями дифференцмрований $D_n,\ n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ допускаемых спектральной задачей (5.2).

В принципе уравнения эквивалентные (5.32) можно получить непосредсвенно из билинейного уравнения (5.7)[10]. Например (ср. (5.23)), учитывая, что

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow\ ad_\sigma(a) \equiv [\sigma,\ a] = 2\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{21} & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.36}$$

для коэффициентов формального ряда (5.33) из формул

$$\begin{gathered} B = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda^2}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda^3}\begin{pmatrix} f & g \\ h & -f \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda^4}\begin{pmatrix} \widetilde{f} & \widetilde{g} \\ \widetilde{h} & -\widetilde{f} \end{pmatrix} + \ldots \\ [V, B] = \lambda[\frac{\sigma}{2}, B] + [\widetilde{V}, B] = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda^2}\begin{pmatrix} 0 & g \\ -h & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda^3}\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{g} \\ -\widetilde{h} & 0 \end{pmatrix} + \\ \frac{1}{\lambda^2}\begin{pmatrix} uc - bv & -2ua \\ 2va & bv - cu \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda^3}\begin{pmatrix} uh - gv & -2uf \\ 2vf & gv - hu \end{pmatrix} + \cdots = B_x \end{gathered}$$

следует, что

$$\begin{cases} b = u_x, \\ c = -v_x; \end{cases} \quad \begin{cases} g = u_{xx} - 2u^2v, \\ h = v_{xx} - 2uv^2; \end{cases} \quad \begin{cases} \widetilde{g} = u_{xxx} - 6uvu_x, \\ \widetilde{h} = -v_{xxx} + 6uvv_x; \end{cases} \tag{5.37}$$

$$\begin{gathered} a_x = uc - vb = (uv)_x, \quad f_x = uh - gv = (uv_x - u_xv)_x, \\ \widetilde{f}_x = u\widetilde{h} - v\widetilde{g} = \left(3u^2v^2 - uv_{xx} - vu_{xx} + u_xv_x\right)_x. \end{gathered} \tag{5.38}$$

Полученные таким прямолинейным способом первые коэффициенты ряда (5.33) в виде однородных многочленов от дифференциальных переменных (см. (5.14)) совпадают очевидно с (5.30) и определив $D_n(V) = \frac{1}{2}ad_\sigma(V_n)$, "несложно" проверить непосредственно, выполнение условий коммутирования (5.32) из Леммы 2.

Подводя итоги и используя явные формулы (5.37) и (5.38) для коэффициентов многочленов $A_n,\ n \in [3]$, перепишем теперь коммутационные соотношения Леммы 2 в более привычном виде уравнений с частными производными. Заменив нижние индексы произвдными по выделенной переменной x и отождествив $D_1 = D_x$ (см (5.13)), $D_2 \equiv iD_t$ и $D_3 \equiv D_\tau$ мы получим, с точностью до замены $u \to \alpha u,\ \alpha \in \mathbb{C}$ следующие системы уравнений с частными производными для комплексно значных функций u и v :

$$\begin{cases} iu_t = u_{xx} - u^2v, \\ -iv_t = v_{xx} - uv^2; \end{cases} \quad \begin{cases} u_\tau = u_{xxx} - uvu_x, \\ v_\tau = v_{xxx} - uvv_x. \end{cases} \tag{5.39}$$

[10]более сложен является случай квадратичных по λ уравнений вида (5.34)

Коммутирование дифференцирований из Леммы 2 означает, грубо говоря, что все полученные таким способом уравнения обладают общим набором законов сохранения вида

$$D_n(\rho) \in \operatorname{Im} D \subset \mathcal{F}, \quad n = 2,\ 3, \dots\ , \tag{5.40}$$

с плотностями $\rho \in \mathcal{F}$.

Упр. 53 Найти плотности законов сохранения для уравнений (5.39), используя в качестве подсказки, формулы (5.38).

С точки зрения приложений наибольший интерес представляют уравнения минимального порядка в иерархии уравнений, связанных с коммутирующими дифференцированиями D_n. В рассматриваемом случае это уравнения второго порядка, допускающие комплексные редукции $v = \pm\bar{u}$:

$$iu_t = u_{xx} - |u|^2 u,\ \text{дефокусировка;} \quad iu_t = u_{xx} + |u|^2 u,\ \text{самофокусировка.} \tag{5.41}$$

После отделения вещественной и мнимой части, мы получаем

$$a_t = b_{xx} \mp (a^2 + b^2)b, \quad -b_t = a_{xx} \mp (a^2 + b^2)p; \qquad (u = a + ib = \pm\bar{v}).$$

Знак + в правой части этих уравнений соответствует случаю самофокусировки $v = -\bar{u}$.

Замечание 2(5). Сведение системы уравнений (5.2) первого порядка к уравнению второго порядка даёт

$$\psi_{xx} = U(x,k)\psi, \quad U = k^2 + p(x)k + q(x) \tag{5.42}$$

. Точнее исключая из системы ψ^1 или ψ^2 мы получаем два уравнения следующего вида:

$$\begin{cases} \psi^- = \psi^1/\sqrt{u} \\ \psi^+ = \psi^2/\sqrt{v} \end{cases} \quad \Rightarrow \ \psi^{\mp}_{xx} = U^{\mp}\psi^{\mp}, \quad U^{\mp} = k^2 + \begin{cases} -k\frac{u_x}{u} + uv + \frac{3}{4}\frac{u_x^2}{u^2} - \frac{1}{2}\frac{u_{xx}}{u} \\ +k\frac{v_x}{v} + uv + \frac{3}{4}\frac{v_x^2}{v^2} - \frac{1}{2}\frac{v_{xx}}{v} \end{cases} \tag{5.43}$$

В обзоре [6] показан, что использование коэффициентов p и q в качестве новых дифференциалных переменных вместо u и v позволяет установить точное соответствие уравнений (5.39) с цепочкой уравнений Тоды о котором говорилось в начале лекции.

Роль билинейного матричного уравнения (5.7) в случае (5.42) играет

$$b_{xxx} = 4Ub_x + 2U_x b, \tag{5.44}$$

Рассматриваемая иерархия, как отмечалось в начале лекции, имеет много общего с

5.3 Преобразование Миуры.

Скалярная редукция $v = u$ в иерархии (5.35) приводит к вырождению уравнений с чётными номерами и главным становится уравнение 3го порядка:

$$u_t = u_{xxx} - 6u^2 u_x \equiv u_3 - 6u^2 u_1. \tag{5.45}$$

Здесь $D_t \equiv D_3$ $D_x \equiv D_1$ модифицированное уравнение KdV

$$q = u_1 - \gamma u^2,\ q_1 = u_2 - 2\gamma u u_1,\ q_2 = u_3 - 2\gamma(uu_2 + u_1^2),\ q_3 = u_4 - 2\gamma(uu_3 + 3u_1u_2)$$
$$q_t = u_4 - 12uu_1^2 - 6u^2u_2 = q_3 + 2\gamma(uu_3 + 3u_1u_2) - 6u^2(q_1 + 2\gamma uu_1) - 12u[q + \gamma u^2]^2$$
$$q_3 + \varepsilon q q_1 = u_4 - 2\gamma(uu_3 + 3u_1u_2) + \varepsilon[u_1 - \gamma u^2][u_2 - 2\gamma uu_1]$$
$$\varepsilon = 6, \quad \gamma = 1$$

Пример 2. Рассмотрим скалярную спектральную задачу Штурма-Лиувилля для оператора Шредингера $L = D_x^2 - q(x)$:

$$\psi_{xx} = (k^2 + q(x))\psi. \tag{5.46}$$

Переписав это уравнение как систему уравнений первого порядка мы получаем вместо (5.7) матричное уравнение следующего вида

$$B_x = V_q B - B V_q, \quad V_q \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k^2 + q & 0 \end{pmatrix} \tag{5.47}$$

а вместо (5.23),- систему уравнений

$$\begin{cases} b_{11,x} = b_{21} - (k^2 + q)b_{12}, \quad b_{12,x} = b_{22} - b_{11} \\ b_{22,x} = -b_{21} + (k^2 + q)b_{12}, \quad b_{21,x} = (b_{11} - b_{22})(k^2 + q). \end{cases}$$

для элементов матрицы $B = (b_{ij})$. В силу этой системы уравнений $\operatorname{tr} B$ не зависит от x и,полагая его равным нулю, мы получаем после исключения b_{21}

$$a = -\frac{1}{2} b_x, \quad a_{xx} + b q_x + 2(q + k^2) b_x = 0, \qquad (a = b_{11},\ b = b_{12}). \tag{5.48}$$

С другой стороны можно проверить, что формулы

$$\begin{gathered} M(\psi) = a(x,\mu)\psi + b(x,\mu)\psi_x, \quad \mu = k^2; \\ \mu^j \psi = L^j \psi, \quad \mu^j \psi_x = D_x \circ L^j \psi, \quad L \equiv D_x^2 - q \end{gathered} \tag{5.49}$$

однозначно определяют [11] коэффициенты дифференциального оператора M и что при таком определении

$$(L \circ M - M \circ L)\psi = (b_{xx} + 2a_x)\psi_x + (a_{xx} + b q_x + 2(q + \mu) b_x)\psi. \tag{5.50}$$

Опираясь на эту формулу нетрудно доказать

Теорема Лакса: Дифференциальный оператор M нечётного порядка $m \geq 3$, коммутирующий с оператором Шредингера $L = D_x^2 - q(x)$ существует в том и только в том случае, если матричное уравнение (5.47) имеет решение $B,\ \operatorname{tr} B = 0$ в классе многочленов от спектрального параметра $\mu = k^2$.

Теорема 2.2. Четверное отношение решений уравнения (**??**) от x не зависит:

$$\frac{(y_4 - y_2)(y_1 - y_3)}{(y_4 - y_3)(y_1 - y_2)} = \text{const}\,. \tag{5.51}$$

◀ Рассмотрим разности $z_{ij} = y_i - y_j,\ i,j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ четырех различных решений уравнения (**??**). Очевидно

$$\frac{dz_{ij}}{dx} = a_0(y_i^2 - y_j^2) + a_1 z_{ij} \ \Rightarrow\ (\log(z_{ij}))_x = a_0(y_i + y_j) + a_1$$

и, следовательно,

$$(\log \frac{z_{13}}{z_{43}})_x = a_0\ z_{14}, \quad (\log \frac{z_{12}}{z_{42}})_x = a_0\ z_{14}$$

Разность полученных выражений равна нулю и отсюда следует утверждение теоремы.▶

[11] при произвольной полиномиальной зависимости a и b от μ

Упражнение 3(5) Проверить инвариантность при дробно-линейных преобразованиях следующих выражений:

$$\frac{u_x v_y}{(u-v)^2}, \qquad \frac{u_{xy}}{2u_x} - \frac{u_y}{u-v}.$$

6 ЛЕКЦИЯ 6: Преобразования Дарбу.

6.1 Солитоны

Рассматриваемые цепочки нелинейных уравнений типа (0.1) связаны с теорией преобразований линейных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Факторизация главной части линейного гиперболического уравнения приводит к следующим двум формулам

$$0 = \varphi_{xy} + a\varphi_x + b\varphi_y + c\varphi \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} (D_y + a)(D_x + b)\varphi = \beta\varphi, \;\beta = b_y - c + ab \\ (D_x + b)(D_y + a)\varphi = \alpha\varphi, \;\alpha = a_x - c + ab \end{cases} \tag{6.1}$$

на которых и основаны рассматриваемые преобразования. Используя эти формулы мы получаем что

$$\begin{gathered} \hat\varphi = \varphi_x + b\varphi \;\Rightarrow\; (D_y + a)\hat\varphi = \beta\varphi, \quad (D_x + \hat b)(D_y + a)\hat\varphi = \beta\hat\varphi, \\ \check\varphi = \varphi_y + a\varphi \;\Rightarrow\; (D_x + b)\check\varphi = \alpha\varphi, \quad (D_y + \check a)(D_x + b)\check\varphi = \alpha\check\varphi \\ D_x + \hat b = \beta\,(D_x + b)\,\beta^{-1}, \quad D_y + \check a = \alpha\,(D_y + a)\,\alpha^{-1} \end{gathered} \tag{6.2}$$

Таким образом, в случае общего положения, при $\alpha\beta \neq 0$, новые функции $\hat\varphi$ и $\check\varphi$ удовлетворяют уравнениям вида (6.1) с коэффициентами главной части преобразованными по формулам (6.2) . В вырожденном случае, при $\alpha\beta = 0$, одно из уравнений в формуле (6.1) распадается на уравнения первого порядка. Рассматриваемое гиперболическое уравнение интегрируется при этом в явном виде.

Величины $\beta = b_y + ab - c$ и $\alpha = a_x + ab - c$ принято называть *инвариантами Лапласа.* В дополнение к (6.2), при приведении оператора $\mathcal{L}$ к каноническому виду, используется *калибровочное преобразование*

$$\mathcal{L}_1 \mapsto \mathcal{L}_2 = f^{-1}\mathcal{L}_1 f.$$

При этом

$$\begin{gathered} (\partial_y + a_2) \circ (\partial_x + b_2) = f^{-1}(\partial_y + a_1) f \circ f^{-1}(\partial_x + b_1) f, \\ a_2 = a_1 + (\log f)_y, \quad b_2 = b_1 + (\log f)_x, \quad c_2 f = \mathcal{L}_1(f). \end{gathered} \tag{6.3}$$

В силу данных формул инварианты Лапласа не меняются при калибровочных преобразованиях, т.е. независимо от выбора функции $f(x, y)$

$$a_{1,x} + a_1 b_1 - c_1 = a_{2,x} + a_2 b_2 - c_2, \quad b_{1,y} + a_1 b_1 - c_1 = b_{2,y} + a_2 b_2 - c_2.$$

С другой стороны, если инварианты Лапласа операторов $\mathcal{L}_j,\; j = 1,\; 2$ совпадают, то связывающее их калибровочное преобразование находится из уравнений

$$(\log f)_x = b_2 - b_1, \quad (\log f)_y = a_2 - a_1. \tag{6.4}$$

Задача 1(5). Доказать, что из совпадения инвариантов Лапласа операторов $\mathcal{L}_j,\ j=1,\ 2$ следует, что $\mathcal{L}_2 = f^{-1}\mathcal{L}_1 f$.

Рассмотрим уравнения, которые возникают в результате повторного применения алгоритма "транспозиции сомножителей" в следующих операторных соотношениях эквивалентных(6.1):

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_x\partial_y + a\partial_x + b\partial_y + c = \begin{cases} (\partial_y + a)(\partial_x + b) + c - ab - b_y \\ (\partial_x + b)(\partial_y + a) + c - ab - a_x \end{cases}. \tag{6.5}$$

Вид уравнений для коэффициентов операторов $\mathcal{L}(n),\ n \in \mathbb{Z}$. связанных этими преобразованиями, зависит от выбора канонической формы операторов цепочки. В случае, когда $a(n) = 0,\ \forall\, n$ мы находим

$$\begin{gathered}(\partial_x\partial_y + b(n)\partial_y + c(n))\,\psi(n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \\ [\partial_x + b(n)]\psi(n) + \psi(n-1) = 0, \quad \partial_y\psi(n) = c(n)\psi(n+1),\end{gathered} \tag{6.6}$$

а при нулевом свободном члене

$$\begin{gathered}(\partial_x\partial_y + A(n)\partial_x + B(n)\partial_y)\,\varphi(n) = 0, \\ [\partial_x + B(n)]\,\varphi(n) = B(n)\varphi(n-1), \quad [\partial_y + A(n)]\,\varphi(n) = A(n)\varphi(n+1)\end{gathered}. \tag{6.7}$$

Ниже будет показано, что случай (6.6), соответствует двумеризации уравнений (2.8) и (2.9) из Лекции 2 и что связь инвариантов Лапласа в случаях (6.7) и (6.6) определяет дискретную симметрию нашей базовой цепочки (0.1).

Теорема Дарбу 5.1. В обоих случаях (6.6) и (6.7) инварианты Лапласа операторов $\mathcal{L}(n),\ n \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют цепочке уравнений (0.1). При этом, коэффициенты операторов $\mathcal{L}(n)$ удовлетворяют соответственно, следующим уравнениям:

$$D_x \log c(n) = b(n+1) - b(n), \quad D_y b(n) = c(n) - c(n-1); \tag{6.8}$$

$$A_x(n) = A(n)\,[B(n+1) - B(n)]\,, \quad B_y(n) = B(n)\,[A(n-1) - A(n)]\,, \tag{6.9}$$

◀ ▶

not edited yet: 1217; Пусть $c(n) = c(n;x,y)$, $b(n) = b(n;x,y)$ удовлетворяют цепочке уравнений: Тогда
i)решения разностных уравнений: удовлетворяют вспомогательным линейным уравнениям:

$$[D_xD_y + b(n)D_y + c(n)]\psi(n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{6.10}$$

и выполняются следующие уравнения Дарбу для инвариантов Лапласа $c(n)$:

$$[\log c(n)]_{xy} = c(n+1) + c(n-1) - 2c(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{6.11}$$

ii) Операторы сдвига и дифференцирования коммутируют друг с другом.

Пусть выполнены уравнения (6.8). Тогда в силу равенства смешанных производных

$$D_xD_y(\log c(n)) = D_yD_x(\log c(n)) = b_y(n+1) - b_y(n) = c(n+1) + c(n-1) - 2c(n),$$

что даёт цепочку уравнений Дарбу. Для доказательства ii) определим операторы "сдвига" $T^{\pm1}:\ \psi(n) \to \psi(n \pm 1)$. Тогда, используя формулы $Tc(n) = c(n+1)T, \quad T^{-1}c(n)T = c(n-1)$, $[D_x, D_y] = [D_x, T] = [D_y, T] = 0$ получаем:

$$[D_x + b(n) + T^{-1},\ D_y - c(n)T] = (-c_x(n) + c(n)b(n+1) - b(n)c(n))T + c(n) - c(n-1) - b_y(n) = 0. \tag{6.12}$$

В обозначениях (6.2) формулы соответствует следующим уравнениям

$$-\psi(n-1) = \hat{\psi}(n) = [\partial_x + b(n)]\psi(n), \quad c(n)\psi(n+1) = \check{\psi}(n)$$

$$B(n)\varphi(n-1) = [\partial_x + B(n)]\varphi(n) = \hat{\varphi}(n), \quad A(n)\varphi(n+1) = \check{\varphi}(n)$$

связь между (0.1) и (**??**)

Example 6 Пример преобразования Дарбу эквивалентного сдвигу $x \leftrightarrow x-1$:

$$A = D^2 - \frac{2}{x^2}, \quad \hat{A} = (D-f)(A-1)(D-f)^{-1} + 1 = D^2 - \frac{2}{(x-1)^2}$$

$$A\psi = \psi, \quad \psi = (1-\frac{1}{x})e^x, \quad f = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}.$$

Этот пример связан с операторами Эйлера:

$$\begin{gathered}\widetilde{A} = D_x^n + \frac{\widetilde{a}_1}{x}D_x^{n-1} + \frac{\widetilde{a}_2}{x^2}D_x^{n-2} + \dots + \frac{\widetilde{a}_n}{x^n}, \quad D_x = e^t D_t, \quad D_t = -xD_x, \\ A = e^{nt}a(D_t), \quad a(D_t) = D_t^n + a_1 D_t^{n-1} + \dots + a_n, \quad x = -e^{-t}.\end{gathered} \tag{6.13}$$

При $n = 2$ собственные функции этих операторов являются функциями Бесселя, имеющими многочисленные приложения в математической физике. Указанная выше замена независимой переменной связывает оператор Эйлера A с оператором с постоянными коэффициентами:

$$x \cdot A \circ \frac{1}{x} = D^2 - \frac{2}{x}D = e^{2t}D_t(D_t+3), \quad D_t = -xD_x.$$

Замечание (6). Нами был также построен широкий класс частице-подобных решений уравнений (5.41). Однако несмотря на обширную литературу по обобщениям этого класса решений до сих пор остаются открытыми важные вопросы, связанные с взимодействием солитоноподобных решений друг с другом и теорией "катастроф"(см. например [**?**] и файл "interpolation.comments"). Классическая спектральная теория, связанная с потенциалами Баргмана для уравнения Штурма-Лиувиля, не решает здесь проблемы.

7 ЛЕКЦИЯ 7: Уравнения Дарбу.

Правые части системы уравнений Дарбу для шести искомых функций

$$(\partial_j + \Gamma_{kj})\,\Gamma_{ki} = \Gamma_{ki}\Gamma_{ij} + \Gamma_{kj}\Gamma_{ji}, \quad i \neq j \neq k, \quad 1 \leq i,j,k \leq 3 \tag{7.1}$$

выражаются через элементы квадрата без-диагональной матрицы $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_{ij})$ [12]:

$$\mathbf{\Gamma}^2 = \begin{pmatrix} \tau - \Gamma_{23}\Gamma_{32} & \hat{\Gamma}_{12} & \hat{\Gamma}_{13} \\ \hat{\Gamma}_{21} & \tau - \Gamma_{13}\Gamma_{31} & \hat{\Gamma}_{23} \\ \hat{\Gamma}_{31} & \hat{\Gamma}_{32} & \tau - \Gamma_{21}\Gamma_{12} \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \det\mathbf{\Gamma} = \Gamma_{31}\Gamma_{12}\Gamma_{23} + \Gamma_{13}\Gamma_{32}\Gamma_{21}, \\ \tau = \Gamma_{13}\Gamma_{31} + \Gamma_{21}\Gamma_{12} + \Gamma_{32}\Gamma_{23}. \\ \hat{\Gamma}_{ij} \overset{\text{def}}{=} \Gamma_{ik}\Gamma_{kj}, \quad \Gamma_{ij}^2 = \frac{\hat{\Gamma}_{ik}\hat{\Gamma}_{kj}}{\hat{\Gamma}_{ji}}, \end{cases} \tag{7.2}$$

[12]$(\Gamma_{ij} \equiv \Gamma_{ij}^i)$, где Γ_{jk}^i—символы Кристоффеля из геометрии [13] поверхностей в $\mathbb{R}^3$.

Proposition: Уравнения Дарбу допускают "конформные" преобразования:

$$x \to X(x), \quad y \to Y(y), \quad z \to Z(z), \tag{7.3}$$

которые не меняют отношений $\Gamma_{ij}/\Gamma_{kj},\ j = 1,\ 2,\ 3:$

$$\frac{1}{X'(x)}\begin{cases}\Gamma_{21}\\ \Gamma_{31}\end{cases}, \quad \frac{1}{Y'(y)}\begin{cases}\Gamma_{32}\\ \Gamma_{12}\end{cases}, \quad \frac{1}{Z'(z)}\begin{cases}\Gamma_{13}\\ \Gamma_{23}\end{cases}.$$

7.0.1 Условие $\det \mathbf{\Gamma} = 0$.

Занулив правые части системы уравнений

$$\begin{cases}(\Gamma_{12})_z = \hat\Gamma_{13} + \hat\Gamma_{12} - \Gamma_{13}\Gamma_{12},\ (\Gamma_{23})_x = \hat\Gamma_{21} + \hat\Gamma_{23} - \Gamma_{21}\Gamma_{23},\ (\Gamma_{31})_y = \hat\Gamma_{32} + \hat\Gamma_{31} - \Gamma_{31}\Gamma_{32}\\ (\Gamma_{21})_z = \hat\Gamma_{23} + \hat\Gamma_{21} - \Gamma_{23}\Gamma_{21},\ (\Gamma_{32})_x = \hat\Gamma_{31} + \hat\Gamma_{32} - \Gamma_{32}\Gamma_{31},\ (\Gamma_{13})_y = \hat\Gamma_{12} + \hat\Gamma_{13} - \Gamma_{13}\Gamma_{12}\end{cases},$$

эквивалентных (7.1), мы получаем следующую систему трех алгебраических уравнений относительно шести неизвестных Γ_{ij}

$$\frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_{31}} + \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{32}} = 1, \quad \frac{\Gamma_{32}}{\Gamma_{12}} + \frac{\Gamma_{23}}{\Gamma_{13}} = 1, \quad \frac{\Gamma_{13}}{\Gamma_{23}} + \frac{\Gamma_{31}}{\Gamma_{21}} = 1. \tag{7.4}$$

Лемма 1(7). Общее решение алгебраических уравнений (7.4) зависит от четырех свободных параметров. При этом всякое решение системы (7.4) удовлетворяет условию $\det \mathbf{\Gamma} = 0$.

◀ Пусть Γ_{12}, Γ_{21} и Γ_{13}, Γ_{31} выбраны в качестве свободных параметров. Из первого и третьего уравнений системы (7.4) следуют равенства

$$\Gamma_{23} = \frac{\Gamma_{13}\Gamma_{21}}{\Gamma_{21} - \Gamma_{31}}, \quad \Gamma_{32} = \frac{\Gamma_{12}\Gamma_{31}}{\Gamma_{31} - \Gamma_{21}}. \tag{7.5}$$

Подставляя во второе уравнение в (7.4) вместо Γ_{23}, Γ_{32} правые части уравнений (7.5), получим тождество. Следовательно, уравнения (7.5) эквивалентны трем уравнениям (7.4).

Для доказательства второй части утверждения леммы заметим, что из (7.5) следует равенство

$$\frac{\Gamma_{13}\Gamma_{21}}{\Gamma_{23}} = -\frac{\Gamma_{12}\Gamma_{31}}{\Gamma_{32}}.$$

Теперь условие $\det \mathbf{\Gamma} = 0$ очевидно в силу формул (7.2). ▶

Example 7 Легко проверить, что если $\Gamma_{12} = \Gamma_{13} = \Gamma_{21} = 1$, $\Gamma_{31} = 2$, $\Gamma_{23} = t$ и $\Gamma_{32} = -2t$, то матрица $\mathbf{\Gamma}$ является вырожденной при любом $t \in \mathbb{R}$. При этом, подстановка данных значений в левые части первого и третьего уравнений в (7.4) дает

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{-2t} = \frac{t-1}{2t}, \qquad \frac{1}{t} + \frac{2}{1} = \frac{2t+1}{t}.$$

Заметим, что уравнения (7.4) выполнены только при $t = -1$.

Можно показать [1], что, с точностью до замены независимых переменных вида (7.3), решения системы трех алгебраических уравнений (7.4) параметризуются тремя функциями одной переменной:

$$\frac{1}{\Gamma_{31}} = X + Z = -\frac{1}{\Gamma_{13}}, \quad \frac{1}{\Gamma_{23}} = Y - Z = \frac{1}{\Gamma_{32}}, \quad \frac{1}{\Gamma_{12}} = X + Y = \frac{1}{\Gamma_{21}},$$

где $X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$ –произвольные функции своего аргумента.

Отметим, что из уравнений Дарбу (7.1) следует

$$\partial_z \Gamma_{12}\Gamma_{21} = \partial_x \Gamma_{23}\Gamma_{32} = \partial_y \Gamma_{13}\Gamma_{31} = \det \mathbf{\Gamma}$$

и что в силу формулы (7.2) вырожденная матрица $\mathbf{\Gamma}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{\Gamma}^3 = \tau \mathbf{\Gamma}, \quad \tau = \Gamma_{13}\Gamma_{31} + \Gamma_{21}\Gamma_{12} + \Gamma_{32}\Gamma_{23}.$$

Вспомогательные линейные уравнения.

Уравнения первого порядка (7.1) с квадратичной нелинейностью сводятся к линейным уравнениям второго порядка на функции u, v, w при помощи следующих замен:

$$\Gamma_{12} = \frac{u_y}{v-u}, \ \Gamma_{13} = \frac{u_z}{w-u}, \ \Gamma_{21} = \frac{v_x}{u-v}, \ \Gamma_{23} = \frac{v_z}{w-v}, \ \Gamma_{31} = \frac{w_x}{u-w}, \ \Gamma_{32} = \frac{w_y}{v-w}. \tag{7.6}$$

Некое подобие замены сводящей уравнение Риккати с квадратичной нелинейностью к линейному уравнений Штурма-Лиувилля второго порядка.

Лемма 2(7). Пусть выполнены уравнения (7.6). Тогда функции Γ_{ij} удовлетворяют системе уравнений (7.1), а функции u, v, w – системе уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} w_{xy} + (\Gamma_{32} - \Gamma_{32}\Gamma_{21}/\Gamma_{31})\, w_x + (\Gamma_{31} - \Gamma_{31}\Gamma_{12}/\Gamma_{32})\, w_y = 0, \\ u_{yz} + (\Gamma_{13} - \Gamma_{13}\Gamma_{32}/\Gamma_{12})\, u_y + (\Gamma_{12} - \Gamma_{12}\Gamma_{23}/\Gamma_{13})\, u_z = 0, \\ v_{zx} + (\Gamma_{21} - \Gamma_{21}\Gamma_{13}/\Gamma_{23})\, v_z + (\Gamma_{23} - \Gamma_{23}\Gamma_{31}/\Gamma_{21})\, v_x = 0. \end{aligned} \tag{7.7}$$

◀ Рассмотрим пару уравнений системы (7.6)

$$w_y + \Gamma_{32} w = \Gamma_{32} v, \qquad w_x + \Gamma_{31} w = \Gamma_{31} u.$$

Дифференцируя первое уравнение системы по y, а второе по x, получим

$$\begin{aligned} w_{xy} + \Gamma_{32,x} w + \Gamma_{32} w_x - \Gamma_{32,x} v - \Gamma_{32} v_x = 0, \\ w_{xy} + \Gamma_{31,y} w + \Gamma_{31} w_y - \Gamma_{31,y} u - \Gamma_{31} u_y = 0. \end{aligned} \tag{7.8}$$

К первым производным функции w слева привлекаем уравнения данной системы, а для производных функций u, v справа привлекаем уравнения из других пар:

$$\begin{aligned} \Gamma_{32} w_x = \Gamma_{32}\Gamma_{31}(u-w), \quad \Gamma_{31} w_y = \Gamma_{31}\Gamma_{32}(v-w), \\ \Gamma_{32} v_x = \Gamma_{32}\Gamma_{21}(u-v), \quad \Gamma_{31} u_y = \Gamma_{31}\Gamma_{12}(v-u). \end{aligned}$$

Тогда, вычитая первое уравнение в (7.8) из второго, получим пару уравнений на функции Γ_{ij}

$$\Gamma_{32,x} = \Gamma_{31,y}, \quad \Gamma_{32,x} = \Gamma_{32}\Gamma_{21} + \Gamma_{31}\Gamma_{12} - \Gamma_{32}\Gamma_{31}$$

с помощью которых, в свою очередь, получаются уравнения на функции u, v, w. Действительно, взяв первое равенство в (7.8), имеем

$$\begin{aligned} & w_{xy} + \Gamma_{32} w_x - \Gamma_{32,x}(v-w) - \Gamma_{32} v_x \\ & = w_{xy} + \Gamma_{32} w_x - \Gamma_{32,x}(v-w) - \Gamma_{32}\Gamma_{21}(u-v) \\ & = w_{xy} + \Gamma_{32} w_x - \frac{\Gamma_{32,x}}{\Gamma_{32}} w_y - \Gamma_{32}\Gamma_{21}(u-w) + \Gamma_{32}\Gamma_{21}(v-w) \\ & = w_{xy} + \left(\Gamma_{32} - \frac{\Gamma_{32}\Gamma_{21}}{\Gamma_{31}}\right) w_x + \left(\Gamma_{31} - \frac{\Gamma_{31}\Gamma_{12}}{\Gamma_{32}}\right) w_y. \end{aligned}$$

Оставшиеся уравнения можно получить аналогично. Лемма доказана. ▶

8 ЛЕКЦИЯ 8: Формализм обратной задачи.

8.1 Проективные координаты.

(5.28)/ обобщаются с незначительными отклонениями на случай $r \times r$ матриц связанных с спектральной задачей

$$\vec{\psi}_x = V\vec{\psi}, \qquad V(x,\lambda) = k\sigma + \widetilde{V}(x), \quad \sigma = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r), \quad \alpha_i \neq \alpha_j, \ \forall\ i \neq j \tag{8.1}$$

где $r \times r$ матрица $\widetilde{V}$ имеет нули на главной диагонали:

В случае общего положения спектральная задача Захарова-Шабата порядка $l \geq 2$ для вектор функции $\vec{\psi} = (\psi^1, \ldots, \psi^l)^\top$: приводится к следующему виду:

$$\begin{gathered} \vec{\psi}_t = V(t,\lambda)\vec{\psi}, \quad V(t,\lambda) = \alpha\lambda + \widetilde{V}(t), \quad \alpha = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \\ \alpha_{ij} = \alpha_i - \alpha_j, \quad \lambda_j = \alpha_j\lambda, \quad \lambda_{ij} = \lambda_i - \lambda_j \quad i,j = 1,\ 2,\ \ldots,\ l. \end{gathered} \tag{8.2}$$

Всего из этих l дополнительных параметров λ_j $l-1$ их разностей являются существенными. Условимся, если не оговорено противное, считать, что матричный потенциал приведён к бездиагональному виду:

$$\widetilde{V} = \begin{bmatrix} 0 & v_{12} & \ldots & v_{1l} \\ v_{21} & 0 & \ldots & v_{2l} \\ & & \ldots\ldots & \\ v_{l1} & v_{l2} & \ldots & 0 \end{bmatrix}. \tag{8.3}$$

зануление диагонали $v_{jj} = 0, \ \forall j \in [m]$ связано с наличием здесь калибровочных замен $\psi^j \to a_j(t)\psi^j$. Переход к однородным проективным координатам

$$\psi^1 : \psi^2 : \cdots : \psi^l \tag{8.4}$$

и пространству $\mathcal{F}$ дифференциальных многочленов мы получаем

Теорема 1(8) Пусть $V(x,k) = ad_\alpha(U(x))$. Тогда общее решение матричного билинейного уравнения (5.7) в виде ряда с коэффициентами $B_n, \ n \in \mathbb{Z}$ с элементами из пространства $\mathcal{F}$

$$\frac{d}{dx}B = V(x,k)\ B - B\ V(x,k), \quad B = \beta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\lambda^n}$$

допускает представление $B = F\beta F^{-1}$, где

$$\frac{d}{dx}F + FF^d - VF = 0, \qquad F^d \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{diag}\left(\lambda_1 + \sum_{j\neq 1} v_{1j}f_{j1}, \ldots, \lambda_m + \sum_{j\neq m} v_{mj}f_{jm}\right); \tag{8.5}$$

степенных рядов $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$

$$F = (f_{ij}) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{\lambda^n}, \ (f_{jj} = 1) \quad \text{and} \quad G = (g_{ij}) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n}{\lambda^n}, \ (g_{jj} = 1) \tag{8.6}$$

удовлетворяющих следующим матричным дифференциальным уравнениям: Коэффициенты F_n и G_n формальных рядов (8.6), являются однородными дифференциальными многочленами от элементов v_{ij} матрицы (**??**) и однозначно определяются уравнениями (**??**) при условии $f_{jj} = g_{jj} = 1, \ \forall j$. В частности

$$G_1 = -F_1 = (u_{ij}), \quad u_{ii} = 0, \quad u_{ij} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{v_{ij}}{\alpha_{ij}}, \quad \forall\ i \neq j \tag{8.7}$$

. Apply now Lemma 2' and use uniqueness properties which provided by $\lambda = \infty$ normalization, one gets

Theorem [g1.tex:05sep2007] Let $F_{\alpha\beta}$ is the algebraic complement of the element $f_{\alpha\beta}$ of the matrix $F = (f_{ij})$ defined by Lemma **??**. Then elements of the matrix $G = (g_{ij})$ from Lemma 2' are

$$g_{ij} = \frac{F_{ji}}{F_{ii}}.$$

Thus in order to find the matrix G one can use the matrix составленную из алгебраических дополнений злементов матрицы F. For example, in the case $l = 3$ we find

$$g_{ij} = \frac{f_{ik}f_{kj} - f_{ij}}{1 - f_{kj}f_{jk}} \;\Rightarrow\; g_{12} = \frac{f_{13}f_{32} - f_{12}}{1 - f_{32}f_{23}}, \quad g_{13} = \frac{f_{12}f_{23} - f_{13}}{1 - f_{32}f_{23}}.$$

and $g_{ij} = -f_{ij}$ in the case $l = 2$.

8.2 Задача RH.

По аналогии с преобрзованием Фурье мы можем поменять ролями спектральный параметр ζ и независимую переменную x в спектальной задаче

$$\vec{\psi}_x = V(x,\zeta)\vec{\psi}, \quad V(x,\zeta) = \alpha\zeta + ad_\alpha(U(x)), \quad ad_a(b) \stackrel{\text{def}}{=} ab - ba. \tag{8.8}$$

Соответствующая двойственная задача формулируется [?] формулируется в этом случае, как задача Римана-Гильберта для кусочно голоморфной матричной функции $\Phi(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}$ с данными на вертикальной оси:

$$\Phi(i\eta + 0)R(i\eta) = \Phi(i\eta - 0), \quad \eta \in \mathbb{R}. \tag{8.9}$$

с нормировочным условием:

$$\Phi(\zeta) = \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_1(\zeta), & \operatorname{Re}\zeta > 0 \\ \Phi_2(\zeta), & \operatorname{Re}\zeta < 0 \end{array} \right., \quad \Phi(\zeta) \to I, \ |\zeta| \to \infty. \tag{8.10}$$

Матричный коэффициент сопряжения R предполагается гладким и удовлетворяющим условиям разрешимости рассматриваемой задачи Римана-Гильберта[13].

Список литературы

[1] Р.Ч. Кулаев, А.Б. Шабат, "Система Дарбу и разделение переменных в задаче Гурса для уравнения третьего порядка в $\mathbb{R}^3$," *UMJ*, to appear

[2] А.Б. Шабат, В.Э. Адлер, "Матрицы Картаны в теории цепочки Тоды-Дарбу," *ТМФ*, март 2018.

[3] В.Э. Адлер, "11 лекций,"

[4] Р.Н.Гарифуллин, А.Шабат, "О структуре полиномиальных законов сохранения," *ТМФ*, **161**(3): 1589-97, 2009

[5] Г.Глэдвелл,"Обратные задачи теории колебаний," М.-Ижевск, 2008.

[13] можно условиться, что $||R - 1|| \ll 1$ в походящей норме

[6] В.Э.Адлер, А.Б.Шабат, Р.И.Ямилов, "Симметрийный подход к проблеме интегрируемости *ТМФ*, **125**(3): 355–424, 2000.

[7] Ian Macdonald,"Symmetric functions.." Oxford, 1998.

[8] W.Fulton, J.Harris,"Representation theory," NY 1991.

[9] В.В. Козлов, Д.В.Трещёв, "Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем с экспоненциальным взаимодействием," *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**(3): 537–556, 1989.

[10] Катанаев М. "Геометрические методы в математической физике," МИАН, 2016

[11] А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов, "Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана," *Preprint*, Ufa, 1981, pages 1-22.

[12] H.S. Wall, "Analytic theory of continued fraction," NY, 1948.

[13] L.Eisenhart, "A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces," 1909 (NY 2006?).

[14] Vito Volterra, "Математическая теория борьбы за существование," (Paris–1931), М., 1976