Карачаевские лекции

А.Шабат

jan2018

Содержание

Аннотация

Обсуждается взаимосвязь инврвиантов, первых интегралов и законов сохранения для интегрируемых систем. Рассматривается модификации симметрических многочленов из теории ненрерывных дробей и их обобщения связанные с формулой Фаа ди Бруно для производных сложных функций. Излагаются азы симметрийной классификации интегрируемух систем, теории коммутативных колец дифференциальных операторов основанной на теореме И.Шура и техники связанной с парами Лакса.

Предисловие. В качестве основной модели мы выбираем цепочку гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными:

$$(\log w_n)_{xy} = w_{n+1} + w_{n-1} - 2w_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{0.1}$$

которая переходит в так называемую цепочку Тоды:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \log z_n = z_{n+1} + z_{n-1} - 2z_n, \quad (\tau \equiv x + y)$$

в результате редукции $w_n(x,y) = z_n(x+y)$. Система уравнений (0.1) имеет многочисленные приложения в геометрии и исторически эти геометрические исследования (Дарбу и др.) являются предтечей современной теории интегрируемых систем, рассматриваемой в данных лекциях. Одномерная редукция (0.1) переписанная в виде уравнений, описывающих движение системы точек на прямой [1]:

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = f(q_{n+1} - q_n) - f(q_n - q_{n-1}), \tag{0.2}$$

даёт при $f(u) = \exp(u)$ пример механической системы, обладающей бесконечным числом независимых интегралов движения.

Вообще говоря уравнения вида (0.2) являются бесконечномерными динамическими системами и описывают "динамику" по непрерывной переменной $t \in \mathbb{R}$ бесконечного набора переменных $q_j,\ j \in \mathbb{Z}$. Мы рассматриваем их законы сохранения, аналогичные первым интегралам конечномерных вариантов этих цепочек. Обобщение этих задач на случае функций $u(n) = u(n,x,y),\ n \in \mathbb{Z}$, от двух непрерывных и одной дискретной переменных, также будут обсуждаться ниже, включая, начала теории интегрируемости двумерной цепочки Тоды (0.1). Довольно неожиданной является тесная взаимосвязь "двумерных" аналогов интегралов цепочки Тоды (см. Лекция 3) с задачей о классификации конечномерных алгебр Ли. Используя связанные с этой классификацией матрицы Картана удаётся на наш взгляд существенно продвинуться в теории интегрируемости классических гамильтоновых систем.

На сайте (matphys.itp.ac.ru) Сектора мат.физики ИТФ им. Ландау можно найти обновляемые записи лекций (В.Э.Адлер, В.В.Соколов и А.Б.Шабат), в которых излагаются математические основы теории солитонов предназначенные для широкой публики (студентов, аспирантов и др.)

1 ЛЕКЦИЯ 1: Производящая функция интегралов.

Для вывода законов сохранения дифференциальных уравнений, связанных с указанными в предисловии цепочками (0.2) и (0.1), нам понадобится обобщение следующей элементарной формулы для следа произведения трёх матриц:

$$B_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & 0 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \operatorname{tr} B_2 B_1 B_0 = a_2 a_1 a_0 + a_2 b_1 c_0 + a_1 b_0 c_2 + a_0 b_2 c_1 \tag{1.1}$$

на случай произведения большого числа матриц B_n. Такие формулы для следов произведений матриц и соответствующих однородных многочленов играют заметную роль в разнообразных задачах математической физики[2].

Теорема 1(1). При любом $m \geq 1$ след произведения матриц B_n выражается следующей формулой, содержащей коммутирующие друг с другом операторы дифференцирования ∂_j по независимым переменным $a_j,\ j = 0, \ldots, m$:

$$\operatorname{tr} B_m \cdots B_0 = \prod_{k=0}^{m} \Delta_k \left(\prod_{j=0}^{m} a_j \right), \quad \Delta_k = I + b_k c_{k-1} \partial_k \partial_{k-1},\ k \geq 1, \quad \Delta_0 \stackrel{\text{def}}{=} I + b_0 c_m \partial_0 \partial_m. \tag{1.2}$$

[1] с взаимодействием ближайших соседей

[2] здесь имеется в виду не только известная теорема Гамильтона-Кэли

Теорема и формула (1.2) дают, например в случае $m = 3$:

$$a_3a_2a_1a_0 \mapsto a_3a_2a_1a_0 + a_3a_2b_1c_0 + \cdots + b_3b_1c_2c_0 + b_2b_0c_3c_1 = \operatorname{tr} B_3 \cdots B_0.$$

Для доказательства формулы (1.2) мы используем итерации рекурсионного соотношения второго порядка:

$$\psi_{n+1} = \alpha_{n+1}\psi_n + \beta_{n+1}\psi_{n-1}. \tag{1.3}$$

Выбрав $\delta = 0$ в формуле (1.10) и обозначив

$$C_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ n \geq 0; \quad \begin{cases} Q_0 = \alpha_0, & Q_{-1} = 1 \\ R_0 = 1, & R_{-1} = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

мы получаем:

Lemma 2(1). При любом $n \geq 1$ результат перемножения матриц (1.4) записывается в виде:

$$C_n \cdot C_{n-1} \cdots C_0 = \begin{pmatrix} Q_n & R_n \\ Q_{n-1} & R_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta_0 \end{pmatrix}) \tag{1.5}$$

где многочлены Q_n и R_n переменных $\alpha_j, \ \beta_j$ определяются рекурсионным соотношением (1.3) с начальными данными (1.4) и могут быть вычислены по следующим точным формулам

$$Q_n = \left[\prod_{k=1}^{n}(I + \beta_k\partial_{k-1}\partial_k)\right]\prod_{j=0}^{n}\alpha_j, \quad R_{n-1} = \partial_n\partial_0 Q_n, \quad \partial_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial\alpha_j}. \tag{1.6}$$

◀ Сначала заметим, что при всех $n \geq 0$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_n & R_n \\ Q_{n-1} & R_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{n+1}Q_n + \beta_{n+1}Q_{n-1} & \alpha_{n+1}R_n + \beta_{n+1}R_{n-1} \\ Q_n & R_n \end{pmatrix}.$$

Отсюда и выбора C_0 в формуле (1.5) следует выполнение рекуррентных соотношений (1.3):

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= \alpha_{n+1}Q_n + \beta_{n+1}Q_{n-1}, \qquad Q_0 = \alpha_0, \quad Q_{-1} = 1 \\ R_{n+1} &= \alpha_{n+1}R_n + \beta_{n+1}R_{n-1}, \qquad R_0 = 1, \quad R_{-1} = 0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

которые полностью определяют рассматриваемые многочлены Q_n и R_n. Доказательство формул (1.6) будем вести индукцией. При $n = 1$ прямым вычислением получаем

$$C_1C_0 = \begin{bmatrix} \alpha_0\alpha_1 + \beta_1 & \alpha_1 \\ \alpha_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta_0 \end{pmatrix}$$

При этом,

$$Q_1 = (I + \beta_1\partial_1\partial_0)(\alpha_0\alpha_1) = \alpha_0\alpha_1 + \beta_1, \quad R_0 = \partial_1\partial_0 Q_1 = 1,$$

Следовательно, лемма верна при $n = 1$.

Предполагая теперь, что, при некотором $n \in \mathbb{N}$ лемма верна для всех натуральных чисел меньших $n + 1$. Покажем её справедливость и при $n + 1$.

Обозначив $A_n = \prod\limits_{j=0}^{n} \alpha_j$, имеем

$$Q_{n+1} = \alpha_{n+1} \left[\prod_{k=1}^{n} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] (A_n) + \beta_{n+1} \left[\prod_{k=1}^{n-1} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] (A_{n-1}) =$$

$$= \left[\prod_{k=1}^{n} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] (A_{n+1}) + \left[\prod_{k=1}^{n-1} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] (\beta_{n+1} \partial_{n+1} \partial_n A_{n+1}) =$$

$$= \left[\prod_{k=1}^{n-1} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] (I + \beta_n \partial_n \partial_{n-1} + \beta_{n+1} \partial_{n+1} \partial_n) (A_{n+1}).$$

Учитывая, что $\partial_k^2 A_n = 0$ для всех k и n, получаем

$$Q_{n+1} = \left[\prod_{k=1}^{n-1} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] \big(I + \beta_n \partial_n \partial_{n-1} + \beta_{n+1} \partial_{n+1} \partial_n + \beta_n \beta_{n+1} \partial_{n+1} \partial_n^2 \partial_{n-1} \big) (A_{n+1}) =$$

$$= (I + \beta_n \partial_n \partial_{n-1})(I + \beta_{n+1} \partial_{n+1} \partial_n) \left[\prod_{k=1}^{n-1} (I + \beta_k \partial_k \partial_{k-1}) \right] (A_{n+1}) = \left[\prod_{k=1}^{n+1} (I + \beta_k \partial_k \partial_{k-1}) \right] (A_{n+1}).$$

Аналогично проверяется выполнение соотношений для R_{n+1}.

$$R_{n+1} = \alpha_{n+1} \partial_{n+1} \partial_0 Q_{n+1} + \beta_{n+1} \partial_n \partial_0 Q_n =$$

$$\partial_0 \left(\left[\alpha_{n+1} \prod_{k=1}^{n+1} (I + \beta_k \partial_k \partial_{k-1}) \right] (A_n) + \beta_{n+1} \left[\prod_{k=1}^{n} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] (A_{n-1}) \right) =$$

$$\partial_0 \left[\prod_{k=1}^{n} (I + \beta_k \partial_{k-1} \partial_k) \right] \big(\alpha_{n+1} (I + \beta_{n+1} \partial_{n+1} \partial_n)(A_n) + \beta_{n+1} \partial_{n+1} \partial_n A_{n+1} \big) =$$

$$\partial_0 \left[\prod_{k=1}^{n} (I + \beta_k \partial_k \partial_{k-1}) \right] (I + \beta_{n+1} \partial_{n+1} \partial_n)(A_{n+1}).$$

Используя для правой части последнего равенства очевидное соотношение

$$A_{n+1} = \partial_{n+2} A_{n+2} = \partial_{n+2} (I + \beta_{n+2} \partial_{n+2} \partial_{n+1})(A_{n+2}),$$

окончательно получим

$$R_{n+1} = \partial_0 \left[\prod_{k=1}^{n+2} (I + \beta_k \partial_k \partial_{k-1}) \right] (\partial_{n+2} A_{n+2}) = \partial_{n+2} \partial_0 Q_{n+2}.$$

Лемма доказана. ►

Переходим к доказательству Теоремы 1:

◄ Заменив в произведении $B_m B_{m-1} \cdots B_0$ (см. (1.2)) все матрицы кроме B_0 в соответствии с формулой

$$B_n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n c_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_{n-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

мы получаем, после взаимного сокращения дополнительных диагональных сомножителей, произведение матриц типа C_n. Поэтому

$$B_m \cdot B_{m-1} \cdots B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_m & R_m \\ Q_{m-1} & R_{m-1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b_0 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

Здесь многочлены Q_n и R_n от переменных $(\alpha_j = a_j,\ \beta_j = b_j c_{j-1})$ определяются как и раньше формулами (1.6).... ▶

1.1 Трёхдиагональные матрицы.

Полученные выше формулы имеют непосредственное отношение к теории непрерывных дробей. Отметим сначала, что итерациям (1.3) отвечают композиции дробно-линейных преобразований комплексной плоскости общего вида:

$$\zeta(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \zeta = \xi + i\eta,\ z = x + iy \ \Leftrightarrow\ (c\zeta - a)(cz+d) = (cb - ad). \tag{1.9}$$

Известно, и это можно проверить непосредственно, что композиции преобразований (1.9) соответствует перемножение связанных с ними невырожденных матриц:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Задача 1(1). Найти образ полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$ и вид матрицы (1.10) для дробно-линейного отображения (1.9), определённого формулой

$$(\zeta+1)(z+1) = 2.$$

Переходя в линейном уравнении (1.3) к проективным координатам мы получаем

$$\begin{gathered} f_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\psi_n}{\psi_{n-1}} \ \Rightarrow\ f_{n+1} = \alpha_{n+1} + \beta_{n+1}\frac{1}{f_n}, \quad f_n = \frac{\alpha_n f_{n-1} + \beta_n}{f_{n-1}}, \\ (\alpha_n f_{n+1} - \gamma_{n+1})(\alpha_n f_{n-1} + \beta_n) + \beta_n\beta_{n+1} = 0, \quad \gamma_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_n\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \end{gathered} \tag{1.11}$$

Задача 2(1). Найти матрицу (1.10) для дробно-линейного отображения $f_{n-1} \to f_{n+1}$, определённого второй из формул (1.11). Найти неподвижные точки этого отображения в случае $\alpha_{n+2} = \alpha_n$, $\beta_{n+2} = \beta_n$, $\forall n$.

В теории непрерывных дробей уравнения (1.11) используются для переписывания формул Леммы 1 в следующем виде ([12], с.14-15):

$$\alpha_0 + \frac{\beta_1|}{|\alpha_1} + \frac{\beta_2|}{|\alpha_2} + \frac{\beta_3|}{|\alpha_3} + \cdots + \frac{\beta_n|}{|\alpha_n} = \frac{Q_n}{R_n}, \quad n \geq 1.$$

где многочлены Q_n и R_n от переменных $(\alpha_j,\ \beta_j)$ определяются при $n \geq 1$ теми же формулами (1.6). В доказательстве вместо матриц (1.4) используется композиция следующих дробно-линейных преобразований:

$$\tau_0(w) = w + \alpha_0, \quad \tau_p(w) = \frac{\beta_p}{w + \alpha_p},\ p > 0 \ \Rightarrow\ \tau_0\tau_1\cdots\tau_n(w) = \frac{R_{n-1}w + R_n}{Q_{n-1}w + Q_n}.$$

Подробно изучается в монографии ([12], с.35) периодический случай $\alpha_{n+N} = \alpha_n$, $\beta_{n+N} = \beta_n$, $\forall n$.

Упражнение: Вычислить значение непрерывной дроби

$$1 + \frac{-1|}{|2} + \frac{-1|}{|2} + \frac{-1|}{|2} + \dots .$$

В дальнейшем мы используем связь Леммы 2 с трёх-диагональными матрицами

$$J = \begin{pmatrix} \alpha_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_2 & -1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{m-1} & \alpha_{m-1} & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_m & \alpha_m \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Отметим, что разложив определитель этой матрицы по двум элементам последней строки мы получаем первое из уравнений (1.7) и формулу $\det J = Q_m$. Отметим, что в силу теоремы Гамильтона-Кэли матрица (1.12) удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$J^{m+1} + \gamma_1 J^m + \dots + \gamma_m J + \gamma_{m+1} = 0, \quad \gamma_1 = -\alpha_0 - \alpha_1 - \dots - \alpha_m, \tag{1.13}$$

корнями которого являются собственные значения матрицы J. Коэффициенты γ_j этого многочлена $\det(J - \lambda E)$ совпадают, как можно проверить, с коэффициентами многочлена от "спектрального"параметра λ полученного заменой $a_n \leftrightarrow \alpha_n - \lambda$ в формуле для Q_m.

Замечание 1(1) В линейной теории колебаний собственные значения аналогичных (1.12) трёхдиагональных матриц Якоби определяют собственные частоты колебаний струны. Связи теории непрерывных дробей с этой задачей на собственные значения обсуждаются в монографии [5].

Замечание 2(1) *Многочлены Шура* дают пример другого подхода к производящим функциям

$$\begin{gathered} \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j \lambda^j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\vec{x})\lambda^n, \quad H_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2, \; H_3 = \frac{1}{6}x_1^3 + x_1 x_2 + x_3, .. \\ H_n(\vec{x}) = \sum_{k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}}{k_1! k_2! \cdots k_n!}, \quad \partial_j H_n = H_{n-j} \end{gathered} \tag{1.14}$$

2 ЛЕКЦИЯ 2: Коммутационные соотношения.

Для вывода "интегрируемых" нелинейных уравнений типа цепочки Тода полезным оказывается следующее дифференциально-разностное уравнение

$$\frac{d}{dt} B_n = V_{n+1} B_n - B_n V_n. \tag{2.1}$$

В левой части этого уравнения производная напоминает своими алгебраическими свойствами коммутатор, и в силу известного правила Лейбница, мы получаем для произведений $C_n =$

$B_{n+1}B_n$ решений рассматриваемого уравнения

$$\frac{d}{dt}C_n = (V_{n+2}B_{n+1} - B_{n+1}V_{n+1})\,B_n + B_{n+1}\,(V_{n+1}B_n - B_nV_n) = \\ = V_{n+2}\,(B_{n+1}B_n) - (B_{n+1}B_n)\,V_n = V_{n+2}C_n - C_nV_n.$$

Поэтому, например в $\mathbb{Z}_2$ периодическом случае ($i.e. V_{n+2} = V_n,\ \forall\ n \in \mathbb{Z}$), уравнение (2.1) даёт

$$\frac{d}{dt}C_n = V_nC_n - C_nV_n \ \Rightarrow\ \frac{d}{dt}\,\mathrm{tr}(B_{n+1}B_n) = 0. \tag{2.2}$$

Это позволяет при помощи Теоремы 1 из прошлой лекции строить первые интегралы и законы сохранения $\mathbb{Z}_N$ редукций рассматриваемых уравнений, которые превращают бесконечную цепочку уравнений (2.1) в конечную систему уравнений для элементов матриц с номерами $n \in [N]$:

$$B_1,\ B_2,\ \ldots, B_N; \quad (B_{-1} \equiv B_{N-1},\ B_0 \equiv B_N,\ B_{N+1} \equiv B_1, \ldots). \tag{2.3}$$

Дополнительный закон сохранения рассматриваемых уравнений не связанный с условием перидичности, получается из красивой формулы для логарифмической производной определителя:

$$\frac{d}{dt}\log\det B(t) = \mathrm{tr}\left(\dot{B}\cdot B^{-1}\right)(t). \tag{2.4}$$

Здесь $\dot{B} = dB(t)/dt$ и для решений B_n матричного уравнения из этой формулы получаем

$$(2.1)\ \Rightarrow\ \frac{d}{dt}\log\det B_n = \mathrm{tr}\left(V_{n+1} - B_nV_nB_n^{-1}\right) = \mathrm{tr}(V_{n+1} - V_n). \tag{2.5}$$

Уравнениям аналогичным уравнениям цепочки Тоды (см. ниже) соответствует следующий выбор матриц B_n и V_n в уравнении (2.1):

$$V_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} k & u_n(t) \\ v_n(t) & -k \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{bmatrix} a_n(t,\lambda) & b_n(t) \\ c_n(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad a_n(t,\lambda) = \lambda + \alpha_n(t). \tag{2.6}$$

Здесь зависимость $a_n = \lambda + \alpha_n$ (ср ?) от дополнительного спектрального параметра λ является существенной и позволяет выразить в явном виде элементы матриц V_n через элементы матриц B_n (ср. (1.1)). Действительно переписав поэлементно уравнения (2.1) мы получаем, обозначая как и выше точками производные по $t \in \mathbb{R}$, что

$$\begin{cases} \dot{a}_n = u_{n+1}c_n - b_nv_n \\ b_nv_{n+1} = c_nu_n \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{b}_n = \lambda b_n - u_n(\lambda + \alpha_n) \\ \dot{c}_n = (\lambda + \alpha_n)v_{n+1} - \lambda c_n \end{cases}, \quad \begin{cases} 2k = \lambda \\ u_n = b_n,\ v_n = c_{n-1} \end{cases}. \tag{2.7}$$

Откуда приравнивая коэффициенты при λ находим, что $u_n = b_n,\ v_n = c_{n-1}$ и, обозначив, как и в прошлой лекции, $\beta_n = b_nc_{n-1} = u_nv_n$, получаем окончательно следующие уравнения

$$\dot{\alpha}_n = \beta_{n+1} - \beta_n, \quad \dot{\beta}_n = \beta_n(\alpha_{n-1} - \alpha_n). \tag{2.8}$$

Исключение α_n из этой системы уравнений первого порядка даёт цепочку уравнений второго порядка

$$\frac{d^2}{dt^2}\log\beta_n = \beta_{n+1} + \beta_{n-1} - 2\beta_n, \tag{2.9}$$

которая совпадает с одномерной редукцией уравнений (0.1) цепочки Дарбу-Лапласа с точностью до обозначений.

Бесконечную цепочку уравнений (2.7) можно превратить в конечномерную динамическую систему, добавив к ней условия периодического замыкания $n \in \mathbb{Z}_N,\ N > 1$. Для того, чтобы использовать Теорему 1 из прошлой лекции, мы заменяем в основной формуле (1.2) при $m = N - 1 > 0$, [3]

$$a_n = \lambda + \alpha_n, \quad b_n c_{n-1} = \beta_n; \quad (\beta_0 = b_0 c_m = b_N c_{N-1} = \beta_N) \tag{2.10}$$

и определяем многочлен степени N (ср. (1.13))

$$G_N(\lambda) = \lambda^N + g_1\lambda^{N-1} + \cdots + g_N, \quad g_1 = \alpha_1 + \ldots \alpha_N, \tag{2.11}$$

коэффициенты которого вычисляются по явным формулам Теоремы 1 начиная с g_1. В силу этих явных формул коэффициенты $g_j,\ j \in [N]$ являются обобщённо однородными многочленами от $2N$ динамических переменных α_j и β_j. В частности при $N = 2$ и $N = 3$ мы, соответственно, находим

$$\begin{gathered} G_2 = \lambda^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\lambda + \alpha_1\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2, \quad G_3 = \lambda^3 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\lambda^2 + \\ (\alpha_2\alpha_1 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_3\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3)\lambda + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_2. \end{gathered} \tag{2.12}$$

В общем случае условие $N-$периодичности (2.3) позволяет перейти от уравнения (2.1) к уравнению вида (2.2) для упорядоченного произведения N элементарных сомножителей:

$$C = B_N B_{N-1} \cdots B_1$$

Как уже отмечалось в силу уравнения $\dot{C} = [C, V]$ коэффициенты $g_j,\ j \in [N]$ многочлена (2.11) являются первыми интегралами динамической системы (2.8) порядка $2N$. В частности при $N = 3$ $\mathbb{Z}_3-$редукция уравнений (2.8) даёт следующую динамическую систему 6-го порядка:

$$\begin{cases} \dot\alpha_1 = \beta_2 - \beta_1, \quad \dot\alpha_2 = \beta_3 - \beta_2, \quad \dot\alpha_3 = \beta_1 - \beta_3 \\ \dot\beta_1 = \beta_1(\alpha_3 - \alpha_1),\ \dot\beta_2 = \beta_2(\alpha_1 - \alpha_2),\ \dot\beta_3 = \beta_3(\alpha_2 - \alpha_3). \end{cases}$$

Три первых интерала $g_j,\ j \in [3]$ указаны в формуле (2.12). Кроме того для понижения порядка можно использовать дополнительный первый интеграл $\beta_1\beta_2\beta_3 = \mathrm{const}$.

Таким образом условия периодичности (2.3) позволяют заменить бесконечную цепочку (2.9) конечной системой дифференциальных уравнений, обладающей широким набором первых интегралов, которые можно использовать при фактического интегрирования этих уравнений и, в частности, для понижения порядка системы.

2.1 Цепочки Тоды.

При дополнительном условии $\det B_n = 1$ (ср. (2.5)) уравнения (2.7) дают $c_n = -e^{-q_n}$, $b_n = e^{q_n}$, $a_n = \lambda - \dot{q}_n$, что приводит нас к уравнениям

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = \exp(q_{n+1} - q_n) - \exp(q_n - q_{n-1}), \tag{2.13}$$

которые носят название цепочки Тоды. Цепочку Тоды можно рассматривать как модель, описывающую систему материальных точек q_j на прямой, связанных пружинками, а переменная t играет роль времени. Обобщение уравнений (2.13) представим в следующем виде

$$\ddot{q}_n = R(\dot{q}_n)\left(g(q_{n+1} - q_n) - g(q_n - q_{n-1})\right), \quad g' = \varepsilon_0 g^2 + \varepsilon_1 g + \varepsilon_2 \tag{2.14}$$

[3] с учётом нумерации $\mathbb{Z}_N-$редукции указанной в формуле (2.3)

где функция $g \equiv g(y)$ является решением уравнения Риккати с произвольными постоянными коэффициентами. $\varepsilon_j \in \mathbb{C}$. Аналогом $\mathcal{S} = \int L(\dot q, q)dt$ интеграла действия (см. следующий раздел) из классической механики является формальное выражение

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n \right) dt, \qquad L_n = K(\dot q_n) - U(q_{n+1} - q_n). \tag{2.15}$$

В случае цепочки Тоды (2.13), соответствующая вариационная задача записывется в виде

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2}\dot q_n)^2 + \exp(q_n - q_{n-1}) \right] dt = 0.$$

Определение (file Глава 3.tex:12.12):. Цепочка уравнений (2.14) называется обобщённой цепочкой Тоды, если эти уравнения совместны с дифференцированием D_τ следующего вида

$$D_\tau(q_n) = R(\dot q_n)\left(g(q_{n+1} - q_n) + g(q_n - q_{n-1})\right) + c\ \dot q_n^2, \quad c \in \mathbb{C} \tag{2.16}$$

Теорема 1(2). Обобщённые цепочки Тоды исчерпываются следующим списком

$$\begin{aligned}
\ddot q_n &= e^{q_{n+1}-q_n} - e^{q_n - q_{n-1}}, \qquad (c=1) && (\mathrm{T}_1)\\
\ddot q_n &= \dot q_n(q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}), \qquad (c=0) && (\mathrm{T}_2)\\
\ddot q_n &= \dot q_n(e^{q_{n+1}-q_n} - e^{q_n - q_{n-1}}), \quad (c=1) && (\mathrm{T}_3)\\
\ddot q_n &= (\mu - \dot q_n^2)(\mathrm{th}[q_{n+1} - q_n] - \mathrm{th}[q_n - q_{n-1}]), \quad (c=0) && (\mathrm{T}_4)\\
\ddot q_n &= (\mu - \dot q_n^2)\left(\frac{1}{q_{n+1} - q_n} - \frac{1}{q_n - q_{n-1}}\right), \qquad (c=0). && (\mathrm{T}_5)
\end{aligned}$$

Схема доказательства. ◀ Уравнения цепочки (2.14) и формуда (2.16) позволяют определить два дифференцирования D_t и D_τ в бесконечном наборе "свободных" динамических переменных

$$\dot q_n,\ q_n,\ \dot q_{n\pm1},\ q_{n\pm1},\ \dot q_{n\pm2},\ q_{n\pm2}, \dots$$

При этом

$$D_t(q_n) = \dot q_n, \quad D_t(\dot q_n) = F_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} F(q_{n+1}, q_{n-1}, q_n, \dot q_n);$$
$$D_\tau(q_n) = f_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} f(q_{n+1}, q_{n-1}, q_n, \dot q_n), \quad D_\tau(\dot q_n) \stackrel{\mathrm{def}}{=} D_t(f_n) = \frac{\partial f_n}{\partial q_{n+1}}\dot q_{n+1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial \dot q_n}F_n$$

В рассматриваемом случае из условия коммутирования дифференцирований $[D_\tau,\ D_t] = 0$ следует уравнение

$$D_\tau(\ddot q_n) = D_\tau(F_n) = D_t^2(f_n), \tag{2.17}$$

которое выполняется только, если сомножитель $R(\dot q_n)$ в уравнениях цепочки (2.14) является многочленом стпени не выше 2 от $\dot q_n$. Остаётся проверить, что с точностью до преобразований $q_n \to \alpha q_n + \beta t + \gamma n$ и $t \to \delta t$ приведённый выше список обобщенных цепочек Тоды исчерпывает, все возможные случаи выполнения уравнения (2.17).▶

В принципе наличие второго дифференцирования D_τ позволяет рассматривать решения обобщённых цепочек Тоды как функции с двумя независимыми переменными t и τ. Это (см. Лекция 5), существенно расширяет область приложений рассматриваемых уравнений.

Задача 1(2): Пусть

$$D_t(q_n) = \dot{q}_n, \quad D_t(\dot{q}_n) = \dot{q}_n(\dot{q}_{n+1} - \dot{q}_{n-1}),$$
$$D_\tau(q_n) = \dot{q}_n(\dot{q}_{n+1} + \dot{q}_{n-1}) + \dot{q}_n^2. \tag{2.18}$$

Вывести отсюда автономную систему уравнений с частными производными для $u = q_n(t, \tau)$, $v = q_{n+1}(t, \tau)$:

$$u_\tau + u_{tt} = u_t^2 + 2u_t v_t, \quad v_\tau - v_{tt} = v_t^2 + 2u_t v_t.$$

и проверить выполнение условия (2.17) совместности дифференцирований D_t и D_τ из формулы (2.18).

Замечание 1(2). Предлагаемый в Теореме 1(2) альтернативный подход к определению цепочек Тоды обобщается на цепочки соответствующие функционалу (см. обзор [6]):

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n \right) dt, \qquad L_n = K(\dot{q}_n, q_n) + \dot{q}_n\ A(q_{n+1}, q_n) + V(q_{n+1}, q_n). \tag{2.19}$$

Нетрудно проверить (ср. (2.15)), что для рассмотренной выше цепочки Вольтерры (2.18):

$$\ddot{q}_n = \dot{q}_n(\dot{q}_{n+1} - \dot{q}_{n-1}), \quad L_n = \dot{q}_n(\log \dot{q}_n - q_{n+1}). \tag{2.20}$$

2.2 Скобки Пуассона.

Используя различные замыкания цепочки уравнений (2.9) в качестве модели мы рассмотрим в следующей лекции вопрос об интегрируемости системы из $r > 1$ уравнений второго порядка следующего достаточно общего вида:

$$\frac{d^2}{dt^2} \log \beta_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \beta_j, \quad i \in [r], \tag{2.21}$$

с невырожденной матрицей $A = (a_{ij})$. Различный выбор матрицы A позволяет варьировать краевые условия для уравнений (2.9) типа условий закрепления, показанных на рис. 1. В силу условия $\det A \neq 0$ мы можем использовать обратимую замену переменных

$$\log \beta_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} u^j, \quad (\beta_1, \dots, \beta_r) \leftrightarrow (u^1, \dots, u^r) = \vec{u} \tag{2.22}$$

для приведения рассматриваемых уравнений (2.21) к виду приспособленному для решения задачи о полиномиальных законах сохранения:

$$\frac{d^2}{dt^2} u^i = e_i = \exp \hat{u}^i, \quad \hat{u}^i \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{r} a_{ij} u^j, \quad i \in [r]. \tag{2.23}$$

В дальнейшем мы наложим на матрицу A дополнительные условия, но сначала мы изложим главные принципы общей теории интегрируемости динамических систем связанные с опытом накопленным при решении аналогичных задач в классической механике.

Определенная инвариантность уравнений движения относительно замен переменных достигается путем введения понятия вариационной производной и записи уравнений в виде уравнений Лагранжа-Эйлера. В простейшем скалярном случае $q(t) \in \mathbb{R}$ это дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}(L_{\dot{q}}) - L_q \equiv \ddot{q} L_{\dot{q}\dot{q}} + \dot{q} L_{\dot{q}q} - L_q = 0, \qquad L = L(\dot{q}, q), \\
E \stackrel{\text{def}}{=} \dot{q} L_{\dot{q}} - L \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt} E(\dot{q}, q) = \ddot{q} L_{\dot{q}} + \dot{q} \frac{d}{dt}(L_{\dot{q}}) - \dot{q} L_q - \ddot{q} L_{\dot{q}} = \dot{q}(\frac{d}{dt}(L_{\dot{q}}) - L_q) = 0.
\end{gathered} \tag{2.24}
$$

В общем случае при $q \in \mathbb{R}^N$ предполагается что рассматриваемая система дифференциальных уравнений описывается некоторым *действием*

$$
S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt, \quad q \doteqdot (q^1, \dots, q^N), \tag{2.25}
$$

где $\dot{q}$ и q, соответственно, обобщённые скорости и координаты точки в *конфигурационном* пространстве $\mathcal{M}$, (или $N-$мерном многообразии $\mathcal{M}$.) Уравнение (2.24) является, является, таким образом, частным случаем общих уравнений Эйлера-Лагранжа:

$$
\frac{\delta S}{\delta q^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0, \quad i \in [N]. \tag{2.26}
$$

При переходе к *гамильтонову формализму* мы вводим в рассмотрение N обобщённых *импульсов*

$$
p_i \doteqdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \tag{2.27}
$$

и используем их как независимые координаты в $2N-$мерном *фазовом* пространстве с координатами (q^i, p_i).

Замечание. На языке многообразий лагранжиан $L(q, \dot{q})$ является функцией на касательном расслоении к многообразию $\mathcal{M}$, а формула (2.27) определяет компоненты ковариантного вектора (1-формы) и тем саиым определяет кокасательное расслоение к многообразию $\mathcal{M}$.

Если невырожден *гессиан*, образованный коэффициентами

$$
\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}
$$

то можно построить преобразование Лежандра (по скоростям) рассматриваемой квадратичной формы:

$$
H(q, p) := p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q}), \tag{2.28}
$$

которое называется *функцией Гамильтона* или гамильтонианом системы. В силу своего определения гамильтониан системы зависит только от обобщенных координат и импульсов. Это можно прокомментировать формулой

$$
\frac{\partial H}{\partial \dot{q}^i} = p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0,
$$

иллюстрирующей свойства преобразования Лежандра.

Рассматривая действие как функционал в фазовом пространстве, мы получаем в силу формулы (2.28):

$$
S[q, p] = \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \dot{q}^i - H(q, p) \right), \quad \frac{\delta S}{\delta q^i} == -\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad \frac{\delta S}{\delta p_i} = \dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p^i}. \tag{2.29}
$$

Отсюда следует, эквивалентность системы уравнений

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \tag{2.30}$$

уравнениям второго порядка (2.26). Можно убедиться в этом и непосредственным дифференцированием.

Пусть теперь в фазовом пространстве с координатами (q, p) заданы две функции $f(q, p)$ и $g(q, p)$. Определим для них скобку Пуассона

$$[f, g] = \sum \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} \tag{2.31}$$

и заметим, что для первых интегралов

$$\frac{d}{dt}f(q, p) = \sum \frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i + \sum \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i = [f, H] = 0.$$

Легко видеть теперь, что следствием тождества Якоби

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$$

является следующая замечательная

Теорема 2(2). Если известны два интеграла движения f и g гамильтоновой системы (2.30), то их скобка Пуассона $[f, g]$ также является интегралом движения.

Задача 2(2) [10], p.740: Проверить, что $[q^i, p_j] = \delta^i_j$ и что для скобки (2.31) выполняется формула Лейбница:

$$[f, gh] = [f, g]h + g[f, h].$$

Задача 3(2): Найти условия на матрицу A, $\det A \neq 0$, обеспечивающие лагранжевость систем уравнений (2.23) и (2.22). Найти уравнения Эйлера-Лагранжа при

$$L(u, v, u_t, v_t) = \frac{1}{2}a_{11}a_{21}u_t^2 + \frac{1}{2}a_{22}a_{12}v_t^2 + a_{12}a_{21}u_t v_t + a_{21}e_1 + a_{12}e_2,$$
$$e_1 = \exp(a_{11}u + a_{12}v), \qquad e_2 = \exp(a_{21}u + a_{22}v).$$

Проверить, что растяжения и сдвиги:

$$u \to \alpha_1 u + \beta_1, \quad v \to \alpha_2 u + \beta_2, \quad \text{при} \ \ a_{11}a_{22} \neq 0 \tag{2.32}$$

позволяют нормировать диагональные элементы матрицы A и выбрать $a_{11} = a_{22} = -2$.

3 ЛЕКЦИЯ 3: Экспоненциальные системы.

Возвращаемся к системе уравнений (2.23)

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{u} = \exp(A\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^r)$$

моделирующей "допустимые" условия замыкания бесконечной системы уравнений цепочки Тоды (2.13). Ясно, что свойства рассматриваемой редуцированной системы дифференциальных уравнений зависят от выбора краевых условий. Например, при $N = 3$ можно сравнить следующие две матрицы A и $\widetilde{A}$. Первая из них A соответствует, как нетрудно убедиться условиям $\beta_0 = \beta_3 = 0$ задачи Дирихле:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Вторая матрица $\widetilde{A}$, отвечающая периодическим условиям (2.3) является очевидно вырожденной[4]. Другими словами вырождение снимается при переходе от условий периодичности к более жёстким граничным условиям типа условий задачи Дирихле и нас интересует именно этот второй случай.

Мы рассмотрим необходимые и достаточные условия, при выполнении которых заданная конечная система дифференциальных уравнений второго порядка (2.23), определяемая матрицей A, обладает нужным числом независимых друг от друга полиномиальных законов сохранения следующего вида

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sum C_\alpha \mathbf{u}_1^{\alpha_1}\mathbf{u}_2^{\alpha_2}\cdots\mathbf{u}_m^{\alpha_m}\right] = 0, \quad \deg \stackrel{\text{def}}{=} |\alpha_1| + 2|\alpha_2| + \ldots m|\alpha_m| = m, \tag{3.2}$$

где нижний индекс обозначает порядок дифференцирования по t.

Лемма 1(3). Пусть $\det A \neq 0$. Тогда экспоненциальная система уравнений (2.23) обладает законом сохранения (3.2) второго порядка $m = 2$, в том и только в том случае, если существует диагональная матрица $\alpha = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ симметризующая $A : (\alpha A)^\intercal = \alpha A$.

◀ В случае симметричной матрицы $A^\intercal = A$ нетрудно проверить, что $\dot{W}_2 = 0$ при

$$W_2 = \sum_{i=1}^{r}[u_2^i - \frac{1}{2}(u_1^i)^2] - \sum_{i<j} a_{ij}u_1^i u_1^j, \quad \vec{u}_1 = \dot{\vec{u}}, \quad \vec{u}_2 = \ddot{\vec{u}}$$

В общем случае интегрирующим множителем для уравнения с номером $i \in [r]$ в системе из r уравнений второго порядка (2.23) является

$$\alpha_i \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\dot{u}^j \;\Rightarrow\; \alpha_i e_i \frac{d}{dt}\hat{u}^i = \alpha_i \frac{d}{dt} e_i$$

и после суммирования и интегрирования мы находим, что

$$\begin{gathered} D_t(u_1^i) = e_i, \quad D_t(u_2^i) = \hat{u}_1^i\; e_i; \\ W_2 = \sum_{i=1}^{r}[\alpha_i u_2^i + \alpha_{ii}(u_1^i)^2] + \sum_{i<j}\alpha_{ij}u_1^i u_1^j, \quad \alpha_{ii} = \frac{1}{2}\alpha_i a_{ii}, \quad \alpha_{ij} = \alpha_i a_{ij},\; i \neq j. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Вообще при $m = 2$

$$D_t(W_2) = (b_{11}u_1^1 + b_{12}u_1^2 + \cdots + b_{1r}u_1^r)e_1 + (b_{21}u_1^1 + b_{22}u_1^2 + \cdots + b_{2r}u_1^r)e_2 + \ldots$$

и приравнивая $b_{ij} = 0$ можно проверить, что условие симметризуемости матрицы A является необходимым для равенства $\dot{W}_2 = 0$. ▶

[4]это верно также при $N > 3$

Задача 1(3). Проверить, что при $r=2$ условие симметризуемости выполнено при $a_{12}a_{21}\neq 0$ и что интеграл W_2 записывается в виде:

$$W_2 = a_{21}u_2 + a_{12}v_2 - a_{12}a_{21}u_1v_1 - \frac{1}{2}\left(a_{11}a_{12}u_1^2 + a_{22}a_{21}v_1^2\right), \tag{3.4}$$

что, учитывая уравнения $u_2 = e_1,\ v_2 = e_2$, эквивалентно классической формуле для гамильтониана (ср. (2.24)):

$$W_2 = a_{21}e_1 + a_{12}e_2 - a_{12}a_{21}\dot{u}\dot{v} - \frac{1}{2}\left(a_{11}a_{12}\dot{u}^2 + a_{22}a_{21}\dot{v}^2\right). \tag{3.5}$$

для уравнений (2.23) в следующих трёх случаях

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

$\boxed{\text{Fulton,Harris,p133,504;[8]}}$

$$\ddot{u}^j = \exp \hat{u}^j, \quad \hat{\mathbf{u}} = A\cdot\mathbf{u}, \quad \det A \neq 0. \tag{3.7}$$

3.1 Матрицы Картана.

Мы рассмотрим условия интегрируемости систем дифференциальных уравнений 4-го порядка вида (**??**) с с произвольной невырожденной матрицей $A=(a_{ij})$ и укажем условия гарантирующие существование двух независимых первых интегралов системы (**??**). переписав её в виде

$$\begin{cases} \ddot{u} = e_1 = \exp\hat{u}, & \hat{u} = a_{11}u + a_{12}v, \\ \ddot{v} = e_2 = \exp\hat{v}, & \hat{v} = a_{21}u + a_{22}v. \end{cases} \tag{3.8}$$

Замена $\beta_i = \exp(a_{i1}u + a_{i2}v)$, связывающая уравнения (3.8) и (**??**) обратима в случае $\det(a_{ij})\neq 0$. Переход к экспоненциальным уравнениям (3.8) существенно упрощает построение явных формул для полиномиальных первых интегралов.

Для построения первых интегралов экспоненциальной системы (3.8), мы вводим в рассмотрение специальную алгебру $\mathcal{W}$ произвольных многочленов от так называемых *дифференциальных переменных*

$$u_j,\ v_j,\ j\geq 1, \quad \deg u_j = \deg v_j = j, \tag{3.9}$$

и обозначаем через $D:\ \mathcal{W}\mapsto\mathcal{W}$ *внутреннее дифференцирование алгебры*, определяемое правилом Лейбница и формулами

$$D:\ u_j \to u_{j+1};\ v_j\to v_{j+1}, \quad \forall j\geq 1. \tag{3.10}$$

Определение 1(2): Полиномиальным W_m-интегралом экспоненциальной системы (3.8) с невырожденной матрицей $A=(a_{ij})$ называется обобщённо-однородный многочлен степени m с постоянными коэффициентами от дифференциальных переменных (3.9) удовлетворяющий уравнению $D_t(W_m)=0$, где

$$D_t\ :\begin{cases} u_1\to e_1,\ u_2\to\hat{u}_1e_1,\ u_3\to(\hat{u}_2+\hat{u}_1^2)e_1,\dots;\ \hat{u}_j = a_{11}u_j + a_{12}v_j, \\ v_1\to e_2,\ v_2\to\hat{v}_1e_2,\ \ v_3\to(\hat{v}_2+\hat{v}_1^2)e_2,\dots;\ \hat{v}_j = a_{21}u_j + a_{22}v_j. \end{cases} \tag{3.11}$$

Можно доказать, что из определений этих двух дифференцирований (3.11) и (3.10) следует, что[5]:

$$D_t(w) = w^{(1)}e_1 + w^{(2)}e_2 \ \Rightarrow\ D_t[D(w)] = (D + \hat{u}_1)w^{(1)} \cdot e_1 + (D + \hat{v}_1)w^{(2)} \cdot e_2. \qquad (3.12)$$

Задача 3(2). Проверить формулу (3.12) для мономов степеней 1, 2 и 3. Законность дифференцирования полиномиальных W_m-интегралов следует из формулы (3.12). Тем не менее независимая проверка уравнения $D_t(W_2') = 0$ проводится ниже при вычислении коэффициентов интеграла W_3 трерьей степени общего вида.▶

Дифференцируем W_3-многочлен общего вида посредством указанных выше формул (3.11):

$$W_3 = \begin{cases} \alpha u_3 + \alpha_1 u_2 u_1 + \gamma_1 u_2 v_1 + \gamma_3 u_1^2 v_1 + \alpha_2 u_1^3 \\ \beta v_3 + \beta_1 v_2 v_1 + \gamma_2 v_2 u_1 + \gamma_4 v_1^2 u_1 + \beta_2 v_1^3 \end{cases}$$

$$D_t : \begin{cases} u_3 \to (\hat{u}_2 + \hat{u}_1^2)e_1,\ u_1u_2 \to (u_2 + u_1\hat{u}_1)e_1,\ u_2v_1 \to v_1\hat{u}_1e_1 + u_2e_2,\ u_1^2v_1 \to 2u_1v_1e_1 + u_1^2e_2 \\ v_3 \to (\hat{v}_2 + \hat{v}_1^2)e_2,\ v_1v_2 \to (v_2 + v_1\hat{v}_1)e_2,\ u_1v_2 \to v_2e_1 + u_1\hat{v}_1e_2,\ u_1v_1^2 \to v_1^2e_1 + 2u_1v_1e_2 \end{cases}.$$

Отделяя члены с e_1 и e_2 находим два уравнения в $\mathcal{W}$:

$$\begin{gathered} \alpha(\hat{u}_2 + \hat{u}_1^2) + \alpha_1(u_2 + u_1\hat{u}_1) + \gamma_1 v_1\hat{u}_1 + \gamma_2 v_2 + 2\gamma_3 u_1 v_1 + \gamma_4 v_1^2 = 0 \\ \beta(\hat{v}_2 + \hat{v}_1^2) + \beta_1(v_2 + v_1\hat{v}_1) + \gamma_1 u_2 + \gamma_2 u_1\hat{v}_1 + \gamma_3 u_1^2 + 2\gamma_4 u_1 v_1 = 0. \end{gathered}$$

Приравнивая нулю коэффициенты этих многочленов получаем следующую линейную систему из 8 уравнений для 10 коэффициентов искомого многочлена W_3:

$$\begin{gathered} \gamma_2 + \alpha a_{12} = \gamma_4 + \alpha a_{12}^2 + \gamma_1 a_{12} = 0,\ 2\gamma_3 + a_{11}[\gamma_1 + a_{12}\alpha] = 0,\ \alpha a_{11} + \alpha_1 = 0 \\ \gamma_1 + \beta a_{21} = \gamma_3 + \beta a_{21}^2 + \gamma_2 a_{21} = 0,\ 2\gamma_4 + a_{22}[\gamma_2 + a_{21}\beta] = 0,\ \beta a_{22} + \beta_1 = 0 \end{gathered} \qquad (3.13)$$

Example 1 В случае $a_{11} = 0,\ a_{12} \cdot a_{21} \neq 0$ мы находим из (3.13) что $\gamma_3 = \alpha_1 = 0$ и далее

$$\gamma_1 = \gamma_2 = -\beta a_{21}, \quad \gamma_4 = 0, \quad \alpha a_{12} = \beta a_{21}, \quad \beta a_{22} + \beta_1 = 0.$$

Это означает, что $W_3 = W_2'$. Полагая для простоты $a_{11} = a_{22} = 0,\ a_{12} = a_{21} = 1$ мы получаем пример экспоненциальной системы, инвариантной при замене $u \leftrightarrow v$, обладающей "единственным" первым интегралы W_2:

$$u_{tt} = e^v, \quad v_{tt} = e^u; \quad W_2 = u_2 + v_2 - u_1v_1 \equiv e^u + e^v - u_tv_t.$$

Как уже говорилось, нас интересуют экспоненциальные системы, обладающие двумя независимыми полиномиальными интегралами из алгебры $\mathcal{W}$. Вид уравнений (3.8) не меняется при масштабных преобразованиях (растяжений и сдвигов) искомых функций. Поэтому в случае общего положения мы фиксируем в качестве условия нормировки диагональные элементы $a_{11} = a_{22} = -2$ предполагая, что $a_{11}a_{22} \neq 0$. Это приводит нас к задаче Дирихле с $a_{12} = a_{21} = 1$, т.к. полученные выше уравнения (3.13) дают

$$\begin{cases} \gamma_2 + \alpha a_{12} = 0, \quad \gamma_4 + a_{12}(\gamma_1 - \gamma_2) = 0, \\ \gamma_1 + \beta a_{21} = 0, \quad \gamma_3 + a_{21}(\gamma_2 - \gamma_1) = 0. \end{cases}, \quad \begin{cases} a_{11} = a_{22} = -2 \\ \gamma_3 = \gamma_1 - \gamma_2 = -\gamma_4 \end{cases}.$$

[5] в следующей лекции мы вернёмся к обсуждению коммутационных соотношений (3.12)

Окончательная формула

$$W_3 = u_3 + 2u_1u_2 + v_1u_2 + v_1u_1^2 - v_3 - 2v_1v_2 - u_1v_2 + v_1u_1^2 - u_1v_1^2, \tag{3.14}$$

находится при помощи следующих формул не связанных с условиями $a_{12} = a_{21} = 1$:

$$D_t(u_3 - u_1\hat{u}_2) = a_{12}[\hat{u}_1v_1e_1 - u_1\hat{v}_1e_2], \quad D_tu_1^2v_1 = u_1^2e_2 + 2u_1v_1e_1,$$
$$D_t(v_3 - v_1\hat{v}_2) = a_{21}[\hat{v}_1u_1e_2 - v_1\hat{u}_1e_1], \quad D_tu_1v_1^2 = v_1^2e_1 + 2u_1v_1e_2$$

Рассматриваемая система дифференциальных уравнений является гамильтоновой и построенный дополнительный первый W_3 свидетельствует об интегрируемости системы (3.8) при $a_{12} = a_{21} = 1$. Следующее утверждение обобщает полученный выше результат.

Теорема 2(2) Экспоненциальная система (3.8) с невырожденной матрицей $A = (a_{ij})$ нормированной условиями $a_{11} = a_{22} = -2$ интегрируема только в следующих трёх случаях:

Набросок доказательства. ◀ Основным вопросом является выяснение возможных порядков дополнительных первых интегралов W_m. Случай $m = 3$ рассмотрен выше. Случай $m = 4$ приводит к громоздким вычислениям и матрице A_2. Соответствующий первый интеграл можно представить в виде:

$$\begin{gathered} W_4 = u_2^2 + v_2^2 + 4u_2v_2 + 2u_1^2u_2 + 2v_1^2v_2 + u_1^2v_2 + 4v_1^2u_2 - 2u_1v_1(u_2 + 2v_2) + \\ u_1^4 + v_1^4 + 5u_1^2v_1^2 - 2u_1v_1(u_1^2 + 2v_1^2) \end{gathered} \tag{3.15}$$

Для того, чтобы исключить в W_4 дифференциальные переменные (3.11) с номерами $j \geq 3$ система дифференциальных уравнений (3.8) записывалась в следующем, близком к "исходному" (**??**) виду:[6]

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 = u_2(a_{11}u_1 + a_{12}v_1), & u_2 = \dot{u}_1 \\ \ddot{v}_1 = v_2(a_{21}u_1 + a_{22}v_1), & v_2 = \dot{v}_1. \end{cases}$$

Замена динамических переменных (u, v, u_1, v_1) на (u_2, v_2, u_1, v_1) является очевидно обратимой в силу невырожденности матрицы $A = (a_{ij})$. Случай $m = 5$ оказывается пустым, а случай $m = 6$ приводит к матрице A_3 и дополнительному первому интегралу W_6 шестого порядка. Формула аналогичная (3.15) в этом случае содержит около 50 различных мономов.▶

Заметим, что в случае задачи Дирихле и серии матриц аналогичных A_1 (ср. (2.21)):

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad (N = 3) \tag{3.16}$$

можно проследить непосредственную связь полиномиальных W_m−интегралов с формулами для коэффициентов g_j многочлена (2.11) из Лекции 1. Условие существования W_2−интеграла при $N = 3$

$$W_2 = \alpha_1u_2 + \alpha_2v_2 + \alpha_3w_2 + \ldots, \quad \alpha_ia_{ij} = \alpha_ja_{ji}, \ i \neq j \ \Rightarrow \ a_{12}a_{23}a_{31} = a_{13}a_{32}a_{21} \tag{3.17}$$

эквивалентно симметризуемости матрицы A и гамильтоновости рассматриваемых дифференциальных уравнений. Обобщение Теоремы 2(2) на экспоненциальные системы с $N \times N$ матрицей A и классификация при $(N > 2)$ интегрируемых случаев требует привлечения матриц Картана (см. например [9]). Иначе говоря задачи о классификации интегрируемых условий замыкания цепочки Тоды оказывается близкой к задаче классификации диэдральных групп Коксера:

not edited yet: Н.Бурбаки "Группы и алгебры Ли:" (Главы 4-6); Мир, М. 1972.

[6]это упрощение позволило В.Э. Адлеру создать компъютерную программу для вычисления W_m

1. переделать (3.13) в упрощённую форму (3.15) и уточнить в духе Эммы Нётер разницу вычислений в $\mathcal{W}$ и в упрощённом виде
2. матричные $u,\ v$ и группы отражений для многочленов W_m (диэдральные группы построенные по диаграммам Дынкина.?)

4 ЛЕКЦИЯ 4: Симметрии гиперболических уравнений.

Мы обсудим здесь несколько неожиданные приложения алгебраической схемы построения полиномиальных первых интегралов W_m экспоненциальных гамильтоновых систем следующего вида Отметимм, что роль гамильтониана играет здесь однородный многочлен второй степени $W_2 \in calW$

многочлен для доказательства интегрируемостипостроений предыдущего раздела . Кажется странным, но использованная нами схема применима, без всяких изменений, и к гиперболическим уравнениям с частными производными:-двумерными двойникам этих экспоненциальных систем [7]:

$$u^j_{xy} = \exp \hat{u}^j,\ j \in [N], \quad \hat{\mathbf{u}} = A \cdot \mathbf{u}, \quad (\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^N)^\intercal,\ \det A \neq 0). \tag{4.1}$$

В частности при $N = 2$ подставив D_y вместо D_t и D_x вместо D мы убеждаемся в справедливости коммутационных соотношений (3.12) и формул Леммы 1 для гиперболической системы уравнений вида (4.1):

$$\begin{cases} u^1_{xy} = e_1 = \exp \hat{u}^1, & \hat{u}^1 = a_{11}u^1 + a_{12}u^2, \\ u^2_{xy} = e_2 = \exp \hat{u}^2, & \hat{u}^2 = a_{21}u^1 + a_{22}u^2. \end{cases} \tag{4.2}$$

В частности полагая $a_{11} = a_{22} = -2$ и возвращаясь временно к упрощённым обозначениям $u^1 = u,\ u^2 = v$ мы находим, как и в предыдущем разделе, что

$$\begin{aligned} D_y(u_3 + 2u_1u_2 - a_{12}u_1v_2) &= a_{12}[\hat{u}_1v_1e_1 - u_1\hat{v}_1e_2], \quad D_yu_1^2v_1 = u_1^2e_2 + 2u_1v_1e_1, \\ D_y(v_3 + 2v_1v_2 - a_{21}v_1u_2) &= a_{21}[\hat{v}_1u_1e_2 - v_1\hat{u}_1e_1], \quad D_yu_1v_1^2 = v_1^2e_1 + 2u_1v_1e_2, \end{aligned}$$

где $u_1 = u_x,\ v_1 = v_x,\ u_2 = u_{xx},\ v_2 = v_{xx}$ и т.д. Как мы знаем из предыдущего раздела из этих формул при $a_{12} = a_{21} = 1$ следует, что $D_y(W_3) = 0$ где дифференциальный многочлен W_3 определяется формулой (3.14). Мы покажем в частности, что первые интегралы рассматриваемых двумеризованных экспоненциальных систем (4.1) позволяют достаточно просто построить симметрии этих гиперболических уравнений в виде уравнений, описывающие совместную с (4.1) эволюцию дифференциальных переменных (3.9) записываемую в виде дополнительного уравнения с частными производными:

$$D_\tau(\mathbf{u_1}) = D_xV(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_m}), \quad m \geq 2. \tag{4.3}$$

В качестве первого примера мы покажем, что симметрией уравнение Лиувилля, которое соответствуе $N = 1$ в рассматриваемой иерархии систем вида (4.1), является известное уравнение Кортевега–де Фриза. На этом примере можно проследить как изменяется, при переходе в двумерие, каноническая взаимосвязь гамильтоновых векторных полей с первыми интегралами из классической теории Гамильтона-Якоби.

[7] первоначально эта схема применялась именно к уравнениям с двумя независимыми переменными (см. [11])

Example 2 Уравнение Лиувилля соответствует скалярной редукции $u^1 = u^2 = u$ экспоненциальной системы (4.2). Эта редукция зануляет (т.к. $u = v$) дифференциальный многочлен (3.14) и мы получаем (ср. Лемма 1(2)):

$$u_{xy} = e^{-u}, \quad D_y(W_2) = 0, \quad W_2 = u_{xx} + \frac{1}{2}u_x^2 = 0. \tag{4.4}$$

Симметриями (4.4) мы называем (формальное определение приводится ниже функцию $V(u_1, u_2, \dots)$ $\mathcal{W}$ удовлетворяющую линеаризации (4.4) на фоне "заданного" решения u уравнения Лиувилля:

$$D_x D_y(V) + e^{-u}\ V = 0.$$

Имеем

$$\Phi_1 = u_3 - \frac{1}{2}u_1^3 \ \Rightarrow\ D_x D_y \Phi_1 = D_x\left[e^u(u_2 - \frac{1}{2}u_1^2)\right] = e^u(u_3 - \frac{1}{2}u_1^3) = e^u\Phi_1,$$

т.к. $D_y u_1 = D_y D_x u = e^u$, $D_y u_2 = e^u u_1$, $D_y u_3 = e^u(u_2 + u_1^2)$ и т.д. Аналогично можно проверить, что решениями симметрийного уравнения (4.5) для уравнения Лиувилля являются

$$\Phi_2 = u_4 - u_2^2 - u_1^2 u_2, \quad \Phi_3 = 2u_4(u_3 - u_1u_2) - u_1u_3^2 - 2u_2^2u_3 + 2u_1u_2^3 + u_1^3u_2^2,$$

причём эволюционное уравнение $D_3(u) = \Phi_3$ является следствием пары уравнений $D_j(u) = \Phi_j,\ j = 1,\ 2$ в том смысле, что дифференцирование $D_3 \sim [D_1, D_2]$ совпадает с коммутатором дифференцирований D_1 и D_2 с точностью до коэффициента.

not edited yet: XY17, Майкоп17

Определение 2. **Симметриями** уравнения в частных производных $F(D^\alpha u) = 0$ называются решения уравнения в вариациях $V([u]),\ F_*(V) = 0$, где:

$$F_*(v) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F[u+\varepsilon v] - F[u]}{\varepsilon}; \quad u,\ v\ \in C^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{4.5}$$

Квадратные скобки $[u]$ обозначают здесь конечный набор частных производных $D^\alpha(u)$ функции $u(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ и формула $v \in \ker F_*$ определяет "касательную плоскость," связанную с дифференциальными следствиями рассматриваемого уравнения $F(D^\alpha u) = 0$.

$$v = (D_x + u_x)W, \quad D_y W = 0 \ \Rightarrow\ [D_x D_y - e^u]v = 0, \quad v \in \ker F_*.$$

1(3): Проверить, что для дифференциальных функций $f \in \mathcal{F}$, не зависящих от x

$$D_x(f) = f_*(u_1)$$

Example 3 Пусть $r = 2$ и нарушено условие невырожденности $a_{12}a_{21} \neq 0$. Положим для простоты $a_{12} = a_{21} = 0$. Тогда

$$\ddot{u} = e^v,\ \ddot{v} = e^u, \quad H = u_2 + v_2 - u_1v_1 \ \Rightarrow\ H_x = u_3 - u_1v_2 + v_3 - v_1u_2.$$

Несовместность двух простых формул:

$$\begin{cases} D_y(u_{m+1} - u_1v_m) = me_1v_1v_{m-1} - e_2u_1u_{m-1} + \dots \\ D_y[au_1^2 + bu_1v_1 + cv_1^2] = e_1(2au_1 + bv_1) + e_2(bu_1 + 2cv_1) \end{cases}$$

приводит, как нетрудно проверить, к невозможности построения следующих сразу за старшими членов однородного многочлена $W^1_{m+1} = u_{m+1} - u_1v_m + f(u_1, v_1)u_{m-1} + g(u_1, v_1)v_{m-1} + \dots$ для всех $m > 3$. Это означает не существование $y-$интегралов отличных от гамильтониана и его производных.

Example 4 Для модельного уравнения одномерных нелинейных волн

$$F \equiv u_t - uu_x = 0, \quad F_* = D_t - u_x - uD_x,$$

$$v([u]) = v(u, u_1, \dots, u_m); \quad D_x: \quad u \mapsto u_1 \mapsto u_2 \mapsto \dots \mapsto u_k \mapsto \dots ,$$

мы находим в ядре F_*

$$v(u, u_1, u_2) = \frac{u_2}{u_1^2} + u^2 u_1.$$

Поэтому решениями симметрийного уравнения (см. определение выше) являются произвольные функции от $v, \ v_1 = v_x, \ \dots$. Имеется здесь и серия законов сохранения с плотностями $\rho_n = u^n$

$$D_t(u^n) = nu^n u_x = \frac{n}{n+1} D_x(u^{n+1}), \quad n = 1, \ 2, \ 3, \dots$$

С другой стороны в результате обратимой замены переменных, так называемого преобразования годографа $\hat{x} = u, \ \hat{u} = x$, мы получаем

$$\begin{gathered} \hat{x} = u, \quad \hat{u} = x, \quad \hat{t} = t; \quad d\hat{x} = u_x dx + u_t dt, \ d\hat{u} = dx, \ d\hat{t} = dt, \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} = \frac{d\hat{u}}{d\hat{x}}\Big|_{d\hat{t}=0} = \frac{1}{u_x}, \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} = \frac{d\hat{u}}{d\hat{t}}\Big|_{d\hat{x}=0} = -\frac{u_t}{u_x} \ \Rightarrow \ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} = \hat{x}. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Решив полученное линейное уравнение и применив теорему о неявной функции мы приходим к формуле

$$u_t = uu_x \ \Leftrightarrow \ \varphi(u) = x - ut,$$

с произвольной функцией $\varphi(u)$, которая, по крайней мере локально, позволяет удовлетворить начальным условиям $u|_{t=0} = f(x)$ задачи Коши.

5 ЛЕКЦИЯ 5: Иерархия НШ.

Возвращаясь к коммутационным соотношениям из Лекции 2 мы построим здесь последовательность коммутирующих друг с другом дифференцирований $D_n, \ n = 1, \ 2, \ \dots$ в пространстве функций от дифференциальных переменных (u, v) :

$$\begin{cases} D_1(u) = u_x \\ D_1(v) = v_x \end{cases}, \quad \begin{cases} D_2(u) = u_{xx} - 2u^2 v \\ D_2(v) = -v_{xx} + 2uv^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} D_3(u) = u_{xxx} - 6uvu_x \\ D_3(v) = v_{xxx} - 6uvv_x \end{cases}, \dots \tag{5.1}$$

Производящей функцией для этих дифференцирований является формальный ряд по обратным степеням параметра $\lambda = 2k$ с матричными коэффициентами удовлетворяющий "билинейному" уравнению:

$$\frac{d}{dx} B = V(x, k) \ B - B \ V(x, k), \tag{5.2}$$

где

$$V = \begin{bmatrix} k & u \\ v & -k \end{bmatrix} = k\sigma + \begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

совпадает, с точностью до обозначений, с матрицей V_n в коммутационных соотношениях (2.6) Лекции 2. Это совпадение не является случайным и имеется непосредственная связь (см., например, обзор [6]) законов сохранения цепочки уравнений Тоды с приведёнными ниже уравнениями для коэффициентов матрицы $B = (b_{ij})$:

$$\begin{gathered} B = (b_{ij}) = k\sigma + \begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} -uv & u_x \\ -v_x & uv \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda^2} \begin{pmatrix} uv_x - u_x v & u_{xx} - 2u^2 v \\ v_{xx} - 2uv^2 & u_x v - uv_x \end{pmatrix} + \dots \\ \begin{cases} D_x(b_{11}) = ub_{21} - b_{12}v, \\ D_x(b_{22}) = b_{12}v - ub_{21}; \end{cases} \quad \begin{cases} D_x(b_{12}) = \lambda b_{21} + u(b_{22} - b_{11}), \\ D_x(b_{21}) = -\lambda b_{21} + v(b_{11} - b_{22}). \end{cases} \end{gathered} \tag{5.4}$$

Существенную роль здесь играет характер зависимости от λ элементов b_{ij} матрицы B и уравнения Риккати, связанные со спектральной задачей

$$\psi_x^1 - k\psi^1 = u\psi^2, \quad \psi_x^2 + k\psi^2 = v\psi^1, \quad k \in \mathbb{C}; \qquad \left(\frac{d}{dx}\vec{\psi} = V(x,k)\psi\right), \tag{5.5}$$

соответствующей указанной выше матрице (5.3).

Прежде чем перейти к непосредственному исследованию уравнения (5.2) заметим, что полагая $D_2 \equiv iD_t$ мы находим (см. (5.1)), что дифференцированию D_2 соответствует следующая система уравнений с частными производными:

$$iu_t = u_{xx} + \varepsilon u^2 v, \quad -iv_t = v_{xx} + \varepsilon uv^2, \quad \varepsilon = \pm 1, \tag{5.6}$$

где величину параметра ε можно выбирать произвольно, используя преобразование растяжения $u \to \tau u$. Наиболее интересны для математической физики следующие две редукции комплексных уравнений НШ (5.6):

$$iu_t = u_{xx} + |u|^2 u, \text{ самофокусировка}; \quad iu_t = u_{xx} - |u|^2 u, \text{ дефокусировка}. \tag{5.7}$$

Самофокусировка соответствует дополнительному условию $v = -\bar{u}$, на матрицу коэффициентов (5.3), а вторая редукция отвечает условию $v = \bar{u}$. Заметим, что после отделения вещественной и мнимой частей, это условие приводит систему (5.6), к паре вещественных уравнений следующего вида:

$$p_t - q_{xx} = (p^2+q^2)q, \quad q_t + p_{xx} = -(p^2+q^2)p; \qquad (u = p + iq = -\bar{v}) \tag{5.8}$$

Замечание 1(5). Система уравнений (5.6) кроме пары "обычных" законов сохранения:

$$i(uv)_t = [u_x v - uv_x]_x,$$
$$i[u_x v - uv_x]_t = (u_{xx}v + uv_{xx} - u_x v_x) + \varepsilon[u^2v^2 + uv_x - u_x v]_x$$

обладает обнаруженном в 1969 году дополнительным законом сохранения, связанным, как стало ясно позднее, с наличием дифференцирования D_3, коммутирующего с D_2.[8] В те годы закладывались основы общего метода обратной задачи и тогда же в 1969 году Ф.Калоджеро опубликовал свою работу об интегрируемости цепочки с взаимодействием по закону обратных квадратов. Чуть позднее в 1971 году, в совместной работе В.Захарова и А.Шабата , была установлена связь дополнительных законов сохранения уравнений (5.6) с спектральными разложениями для спектральной задачи (5.5).

Замечание 2(5). Вопросы классификации солитоноподобных решений уравнений (5.7) связаны с теорией "катастроф"(см. недавнюю работу Gaillard15; [2] Gaillard P 2011 J. Phys. A : Meth. Theor. 44 1)

Переход в линейной системе (5.5) второго порядка от функций независимого переменной x к многочленам от дифференциальных переменных (u, v), осуществляется при помощи "проективных координат" и следующего уравнению Риккати с квадратичной нелинейностью:

$$f_x + f^2 v - 2kf = u, \quad f = \frac{\psi^1}{\psi^2}. \tag{5.9}$$

Решения последнего ищутся в виде формальных рядов по обратным степеням спектрального параметра k:

$$f(x,k) = \frac{f_1(x)}{2k} + \frac{f_2(x)}{4k^2} + \frac{f_3(x)}{8k^3} \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j}{\lambda^j}, \quad \lambda \equiv 2k. \tag{5.10}$$

[8]Связь законов сохранения и симметрий для уравнений (5.6) рассматривалась в обзоре [6]

Лемма 2(5). Подстановка формального ряда (5.10) в уравнение Риккати (5.9) однозначно определяет все коэффициенты этого ряда $f \equiv f_{12}$:

$$f_{12} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{-u}{\lambda} - \frac{u_x}{\lambda^2} + \frac{u^2 v - u_{xx}}{\lambda^3} + \frac{v_x u^2 + 4uvu_x - u_{xxx}}{\lambda^4} + \dots\ . \tag{5.11}$$

Замечание 3(5). Пара формальных решений $f_{ij} = \psi^i/\psi^j$ двух взаимозаменяемых уравнений Риккати:

$$\frac{df_{21}}{dx} + uf_{21}^2 + \lambda f_{21} = v, \qquad \frac{df_{12}}{dx} + vf_{12}^2 - \lambda f_{12} = u \tag{5.12}$$

позволяет, привлекая квадратуры (т.е. интегрирование), построить матричное решение уравнений (5.5) следующего специального вида:

$$\Psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi_1^1 & \psi_2^1 \\ \psi_1^2 & \psi_2^2 \end{pmatrix} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & f_{12} \\ f_{21} & 1 \end{pmatrix} \alpha, \quad \frac{d\log\alpha}{dx} = \mathrm{diag}(f_{21} + k, f_{12} - k) \tag{5.13}$$

где $\alpha = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2)$. Формальные решения вида (5.10) уравнений (5.12) связаны друг с другом заменами $\lambda \to -\lambda$, $u \leftrightarrow v$, а из формулы (2.4) дифференцирования определителей следует, что

$$(1 - f_{12}f_{21})\alpha_1\alpha_2 = \mathrm{const} \tag{5.14}$$

Отметим ещё, что аналогичное (5.13) матричное решение Φ_β двойственного уравнения $\Phi' + \Phi\, V(x,k) = 0$ имеет следующую структуру:

$$\Phi_\beta = \beta \left[\begin{array}{cc} 1 & g_{12} \\ g_{21} & 1 \end{array} \right] \ \Rightarrow\ \begin{cases} g_{12,x} - \lambda g_{12} + u = g_{12}^2 v, \\ g_{21,x} + \lambda g_{21} + v = +g_{21}^2 u \end{cases}, \quad \beta = \mathrm{diag}(\beta_1, \beta_2). \tag{5.15}$$

Учитывая Лемму 2 находим, что $g_{12} = -f_{12}$ и $g_{21} = -f_{21}$.

Решения уравнения (5.2), объединяющего левый и правый вариант спектральной задачи (5.5), строятся в соответствии с формулой

$$B = \Psi\Phi\ :\quad \frac{d}{dx}\Psi - V(x,k)\Psi = 0, \quad \frac{d}{dx}\Phi + \Phi\, V(x,k) = 0.$$

Теорема 4(5). Общее решение уравнения (5.2) в классе формальных рядов по обратным степеням спектрального параметра λ является линейной комбинацией следующих двух[9]:

$$B = \frac{1}{1 - f_{12}f_{21}} \begin{pmatrix} 1 & -f_{12} \\ f_{21} & -f_{12}f_{21} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B} = \frac{1}{1 - f_{12}f_{21}} \begin{pmatrix} -f_{12}f_{21} & f_{12} \\ -f_{21} & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

где f_{12} и f_{21} являются решениями уравнений Риккати (5.12) вида (5.10).

◀ В случае B мы имеем

$$b_{11} + b_{22} = 1, \quad b_{12} = -f_{12}h, \quad b_{21} = f_{21}h, \quad b_{11} = h \stackrel{\mathrm{def}}{=} (1 - f_{12}f_{21})^{-1}$$

Заметив, что из уравнений (5.12) следует, что

$$\frac{d}{dx}\log(1 - f_{12}f_{21}) + uf_{21} + vf_{12} = 0 \tag{5.17}$$

[9]элементы матриц предполагаются дифференциальными многочленами от (u, v)

нетрудно проверить выполнение уравнений (5.4) эквивалентных (5.2). Аналогично проверяется случай $\widetilde{B}$. Из формулы (5.16) следует, что $\mathrm{tr}(B-\widetilde{B})=0$... ▶

$$D_\tau(uv)+\lambda D_x(b_{11})=0, \quad D_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n}{\lambda^n}. \tag{5.18}$$

$$b_{11}=1+\frac{uv}{\lambda^2}+\frac{u_xv-uv_x}{\lambda^3}+\frac{vu_{xx}+uv_{xx}-u_xv_x-2u^2v^2}{\lambda^4}+\dots \tag{5.19}$$

Замечание 5(5) *Elementary* solutions of the equation (**??**) are defined as follows

$$B=(b_{ij})=\frac{\psi\times\varphi}{<\psi,\varphi>}, \quad b_{ij}=\frac{\psi^i\varphi_j}{<\psi,\varphi>} \;\Rightarrow\; B^2=B. \tag{5.20}$$

Here vectors $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_l)$ and $\psi=(\psi^1,\dots,\psi^l)^T$ are, respectively,

$$[D_\alpha-V_\alpha, D_\beta-V_\beta]\equiv D_\beta(V_\alpha)-D_\alpha(V_\beta)+V_\alpha V_\beta-V_\beta V_\alpha=0, \tag{5.21}$$

Пример 2(5):

$$[V,\ (a_{ij})]=\lambda\begin{pmatrix}0 & a_{12}\\ -a_{21} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ua_{21}-va_{12} & u(a_{22}-a_{11})\\ v(a_{11}-a_{22}) & va_{12}-ua_{21}0\end{pmatrix}$$

эта задача сводится к вопросу о разрешимости матричных уравнений

$$[D_1-V_1,\ D_n-V_n]\equiv D_n(V_1)-D_1(V_n)+V_1V_n-V_nV_1=0, \quad (D_1\equiv D_x). \tag{5.22}$$

где элементы рассматриваемого семейства 2×2 матриц полиномиально зависят от дополнительного параметра k. Степень многочлена V_n от k полагается здесь равной n.

Пример 1(5). Выбрав в уравнении (5.22)

$$V_2=2k\begin{pmatrix}k & u\\ v & -k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-uv & u_x\\ -v_x & uv\end{pmatrix}=\lambda V_1+\widetilde{V}_2$$

мы получаем указанные выше формулы для элементов $D_2(u)$ и $D_2(v)$ матрицы $D_2(V_1)$. Аналогично при

$$V_3=\lambda V_2+\widetilde{V}_3 \tag{5.23}$$

несложно подобрать элементы 2×2 новой, не зависящей от k матрицы $\widetilde{V}_3$, приводящие к указанным в (5.1) формулам для $D_3(u)$ и $D_3(v)$.

5.1 Обобщённое уравнение Риккати.

Теорема 2.2. Четверное отношение решений уравнения (**??**) от x не зависит:

$$\frac{(y_4-y_2)(y_1-y_3)}{(y_4-y_3)(y_1-y_2)}=\mathrm{const}\,. \tag{5.24}$$

◀ Рассмотрим разности $z_{ij}=y_i-y_j,\ i,j=1,\ 2,\ 3,\ 4$ четырех различных решений уравнения (**??**). Очевидно

$$\frac{dz_{ij}}{dx}=a_0(y_i^2-y_j^2)+a_1z_{ij} \;\Rightarrow\; (\log(z_{ij}))_x=a_0(y_i+y_j)+a_1$$

и, следовательно,

$$(\log\frac{z_{13}}{z_{43}})_x = a_0\ z_{14}, \quad (\log\frac{z_{12}}{z_{42}})_x = a_0\ z_{14}$$

Разность полученных выражений равна нулю и отсюда следует утверждение теоремы.▶

Упражнение 3(5) Проверить инвариантность при дробно-линейных преобразованиях следующих выражений:

$$\frac{u_x v_y}{(u-v)^2}, \qquad \frac{u_{xy}}{2u_x} - \frac{u_y}{u-v}.$$

6 ЛЕКЦИЯ 6: Преобразования Дарбу.

Рассматриваемые цепочки нелинейных уравнений типа (0.1) связаны с теорией преобразований линейных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Факторизация главной части линейного гиперболического уравнения приводит к следующим двум формулам

$$0 = \varphi_{xy} + a\varphi_x + b\varphi_y + c\varphi \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} (D_y + a)(D_x + b)\varphi = \beta\varphi, \ \beta = b_y - c + ab \\ (D_x + b)(D_y + a)\varphi = \alpha\varphi, \ \alpha = a_x - c + ab \end{cases} \tag{6.1}$$

на которых и основаны рассматриваемые преобразования. Используя эти формулы мы получаем что

$$\begin{gathered} \hat\varphi = \varphi_x + b\varphi \ \Rightarrow\ (D_y + a)\hat\varphi = \beta\varphi, \quad (D_x + \hat b)(D_y + a)\hat\varphi = \beta\hat\varphi, \\ \check\varphi = \varphi_y + a\varphi \ \Rightarrow\ (D_x + b)\check\varphi = \alpha\varphi, \quad (D_y + \check a)(D_x + b)\check\varphi = \alpha\check\varphi \\ D_x + \hat b = \beta\,(D_x + b)\,\beta^{-1}, \quad D_y + \check a = \alpha\,(D_y + a)\,\alpha^{-1} \end{gathered} \tag{6.2}$$

Таким образом, в случае общего положения, при $\alpha\beta \neq 0$, новые функции $\hat\varphi$ и $\check\varphi$ удовлетворяют уравнениям вида (6.1) с коэффициентами главной части преобразованными по формулам (6.2) . В вырожденном случае, при $\alpha\beta = 0$, одно из уравнений в формуле (6.1) распадается на уравнения первого порядка. Рассматриваемое гиперболическое уравнение интегрируется при этом в явном виде.

Величины $\beta = b_y + ab - c$ и $\alpha = a_x + ab - c$ принято называть *инвариантами Лапласа.* В дополнение к (6.2), при приведении оператора $\mathcal{L}$ к каноническому виду, используется *калибровочное преобразование*

$$\mathcal{L}_1 \mapsto \mathcal{L}_2 = f^{-1}\mathcal{L}_1 f.$$

При этом

$$\begin{gathered} (\partial_y + a_2)\circ(\partial_x + b_2) = f^{-1}(\partial_y + a_1)f \circ f^{-1}(\partial_x + b_1)f, \\ a_2 = a_1 + (\log f)_y, \quad b_2 = b_1 + (\log f)_x, \quad c_2 f = \mathcal{L}_1(f). \end{gathered} \tag{6.3}$$

В силу данных формул инварианты Лапласа не меняются при калибровочных преобразованиях, т.е. независимо от выбора функции $f(x,y)$

$$a_{1,x} + a_1 b_1 - c_1 = a_{2,x} + a_2 b_2 - c_2, \quad b_{1,y} + a_1 b_1 - c_1 = b_{2,y} + a_2 b_2 - c_2.$$

С другой стороны, если инварианты Лапласа операторов $\mathcal{L}_j,\ j = 1,\ 2$ совпадают, то связывающее их калибровочное преобразование находится из уравнений

$$(\log f)_x = b_2 - b_1, \quad (\log f)_y = a_2 - a_1. \tag{6.4}$$

Задача 1(5). Доказать, что из совпадения инвариантов Лапласа операторов $\mathcal{L}_j,\ j = 1,\ 2$ следует, что $\mathcal{L}_2 = f^{-1}\mathcal{L}_1 f$.

Рассмотрим уравнения, которые возникают в результате повторного применения алгоритма "транспозиции сомножителей" в следующих операторных соотношениях эквивалентных(6.1):

$$\mathcal{L} \overset{\text{def}}{=} \partial_x\partial_y + a\partial_x + b\partial_y + c = \begin{cases} (\partial_y + a)(\partial_x + b) + c - ab - b_y \\ (\partial_x + b)(\partial_y + a) + c - ab - a_x \end{cases}. \tag{6.5}$$

Вид уравнений для коэффициентов операторов $\mathcal{L}(n),\ n \in \mathbb{Z}$. связанных этими преобразованиями, зависит от выбора канонической формы операторов цепочки. В случае, когда $a(n) = 0,\ \forall\, n$ мы находим

$$\begin{gathered} (\partial_x\partial_y + b(n)\partial_y + c(n))\,\psi(n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \\ [\partial_x + b(n)]\psi(n) + \psi(n-1) = 0, \quad \partial_y\psi(n) = c(n)\psi(n+1), \end{gathered} \tag{6.6}$$

а при нулевом свободном члене

$$\begin{gathered} (\partial_x\partial_y + A(n)\partial_x + B(n)\partial_y)\,\varphi(n) = 0, \\ [\partial_x + B(n)]\,\varphi(n) = B(n)\varphi(n-1), \quad [\partial_y + A(n)]\,\varphi(n) = A(n)\varphi(n+1) \end{gathered}. \tag{6.7}$$

Ниже будет показано, что случай (6.6), соответствует двумеризации уравнений (2.8) и (2.9) из Лекции 2 и что связь инвариантов Лапласа в случаях (6.7) и (6.6) определяет дискретную симметрию нашей базовой цепочки (0.1).

Теорема Дарбу 5.1. В обоих случаях (6.6) и (6.7) инварианты Лапласа операторов $\mathcal{L}(n),\ n \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют цепочке уравнений (0.1). При этом, коэффициенты операторов $\mathcal{L}(n)$ удовлетворяют соответственно, следующим уравнениям:

$$D_x \log c(n) = b(n+1) - b(n), \quad D_y b(n) = c(n) - c(n-1); \tag{6.8}$$

$$A_x(n) = A(n)\left[B(n+1) - B(n)\right], \quad B_y(n) = B(n)\left[A(n-1) - A(n)\right], \tag{6.9}$$

◀ ▶

not edited yet: 1217; Пусть $c(n) = c(n; x, y)$, $b(n) = b(n; x, y)$ удовлетворяют цепочке уравнений: Тогда
i)решения разностных уравнений: удовлетворяют вспомогательным линейным уравнениям:

$$[D_x D_y + b(n)D_y + c(n)]\psi(n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{6.10}$$

и выполняются следующие уравнения Дарбу для инвариантов Лапласа $c(n)$:

$$[\log c(n)]_{xy} = c(n+1) + c(n-1) - 2c(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{6.11}$$

ii) Операторы сдвига и дифференцирования коммутируют друг с другом.

Пусть выполнены уравнения (6.8). Тогда в силу равенства смешанных производных

$$D_x D_y(\log c(n)) = D_y D_x(\log c(n)) = b_y(n+1) - b_y(n) = c(n+1) + c(n-1) - 2c(n),$$

что даёт цепочку уравнений Дарбу. Для доказательства ii) определим операторы "сдвига" $T^{\pm 1}:\ \psi(n) \to \psi(n \pm 1)$. Тогда, используя формулы $Tc(n) = c(n+1)T, \quad T^{-1}c(n)T = c(n-1)$, $[D_x, D_y] = [D_x, T] = [D_y, T] = 0$ получаем:

$$[D_x + b(n) + T^{-1},\ D_y - c(n)T] = (-c_x(n) + c(n)b(n+1) - b(n)c(n))T + c(n) - c(n-1) - b_y(n) = 0. \tag{6.12}$$

В обозначениях (6.2) формулы соответствует следующим уравнениям

$$-\psi(n-1) = \hat{\psi}(n) = [\partial_x + b(n)]\psi(n), \quad c(n)\psi(n+1) = \breve{\psi}(n)$$

$$B(n)\varphi(n-1) = [\partial_x + B(n)]\varphi(n) = \hat{\varphi}(n), \quad A(n)\varphi(n+1) = \breve{\varphi}(n)$$

связь между (0.1) и (**??**)

Example 5 Пример преобразования Дарбу эквивалентного сдвигу $x \leftrightarrow x-1$:

$$A = D^2 - \frac{2}{x^2}, \quad \hat{A} = (D-f)(A-1)(D-f)^{-1} + 1 = D^2 - \frac{2}{(x-1)^2}$$

$$A\psi = \psi, \quad \psi = (1 - \frac{1}{x})e^x, \quad f = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}.$$

Этот пример связан с операторами Эйлера:

$$\begin{gathered} \widetilde{A} = D_x^n + \frac{\widetilde{a}_1}{x} D_x^{n-1} + \frac{\widetilde{a}_2}{x^2} D_x^{n-2} + \cdots + \frac{\widetilde{a}_n}{x^n}, \quad D_x = e^t D_t, \quad D_t = -x D_x, \\ A = e^{nt} a(D_t), \quad a(D_t) = D_t^n + a_1 D_t^{n-1} + \cdots + a_n, \quad x = -e^{-t}. \end{gathered} \tag{6.13}$$

При $n = 2$ собственные функции этих операторов являются функциями Бесселя, имеющими многочисленные приложения в математической физике. Указанная выше замена независимой переменной связывает оператор Эйлера A с оператором с постоянными коэффициентами:

$$x \cdot A \circ \frac{1}{x} = D^2 - \frac{2}{x} D = e^{2t} D_t (D_t + 3), \quad D_t = -x D_x.$$

7 ЛЕКЦИЯ 7: Уравнения Дарбу.

Правые части системы уравнений Дарбу для шести искомых функций

$$(\partial_j + \Gamma_{kj})\,\Gamma_{ki} = \Gamma_{ki}\Gamma_{ij} + \Gamma_{kj}\Gamma_{ji}, \quad i \neq j \neq k, \quad 1 \leq i, j, k \leq 3 \tag{7.1}$$

выражаются через элементы квадрата без-диагональной матрицы $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_{ij})$ [10]:

$$\mathbf{\Gamma}^2 = \begin{pmatrix} \tau - \Gamma_{23}\Gamma_{32} & \hat{\Gamma}_{12} & \hat{\Gamma}_{13} \\ \hat{\Gamma}_{21} & \tau - \Gamma_{13}\Gamma_{31} & \hat{\Gamma}_{23} \\ \hat{\Gamma}_{31} & \hat{\Gamma}_{32} & \tau - \Gamma_{21}\Gamma_{12} \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \det \mathbf{\Gamma} = \Gamma_{31}\Gamma_{12}\Gamma_{23} + \Gamma_{13}\Gamma_{32}\Gamma_{21}, \\ \tau = \Gamma_{13}\Gamma_{31} + \Gamma_{21}\Gamma_{12} + \Gamma_{32}\Gamma_{23}. \\ \hat{\Gamma}_{ij} \overset{\text{def}}{=} \Gamma_{ik}\Gamma_{kj}, \quad \Gamma_{ij}^2 = \frac{\hat{\Gamma}_{ik}\hat{\Gamma}_{kj}}{\hat{\Gamma}_{ji}}, \end{cases} \tag{7.2}$$

Proposition: Уравнения Дарбу допускают "конформные" преобразования:

$$x \to X(x), \quad y \to Y(y), \quad z \to Z(z), \tag{7.3}$$

которые не меняют отношений $\Gamma_{ij}/\Gamma_{kj}, \ j = 1, \ 2, \ 3:$

$$\frac{1}{X'(x)} \begin{cases} \Gamma_{21} \\ \Gamma_{31} \end{cases}, \quad \frac{1}{Y'(y)} \begin{cases} \Gamma_{32} \\ \Gamma_{12} \end{cases}, \quad \frac{1}{Z'(z)} \begin{cases} \Gamma_{13} \\ \Gamma_{23} \end{cases}.$$

[10]$(\Gamma_{ij} \equiv \Gamma_{ij}^i)$, где Γ_{jk}^i—символы Кристоффеля из геометрии [13] поверхностей в $\mathbb{R}^3$.

7.0.1 **Условие** $\det \mathbf{\Gamma} = 0$.

Занулив правые части системы уравнений

$$\begin{cases} (\Gamma_{12})_z = \hat{\Gamma}_{13} + \hat{\Gamma}_{12} - \Gamma_{13}\Gamma_{12}, \ (\Gamma_{23})_x = \hat{\Gamma}_{21} + \hat{\Gamma}_{23} - \Gamma_{21}\Gamma_{23}, \ (\Gamma_{31})_y = \hat{\Gamma}_{32} + \hat{\Gamma}_{31} - \Gamma_{31}\Gamma_{32} \\ (\Gamma_{21})_z = \hat{\Gamma}_{23} + \hat{\Gamma}_{21} - \Gamma_{23}\Gamma_{21}, \ (\Gamma_{32})_x = \hat{\Gamma}_{31} + \hat{\Gamma}_{32} - \Gamma_{32}\Gamma_{31}, \ (\Gamma_{13})_y = \hat{\Gamma}_{12} + \hat{\Gamma}_{13} - \Gamma_{13}\Gamma_{12} \end{cases},$$

эквивалентных (7.1), мы получаем следующую систему трех алгебраических уравнений относительно шести неизвестных Γ_{ij}

$$\frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_{31}} + \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{32}} = 1, \quad \frac{\Gamma_{32}}{\Gamma_{12}} + \frac{\Gamma_{23}}{\Gamma_{13}} = 1, \quad \frac{\Gamma_{13}}{\Gamma_{23}} + \frac{\Gamma_{31}}{\Gamma_{21}} = 1. \tag{7.4}$$

Лемма 1(7). Общее решение алгебраических уравнений (7.4) зависит от четырех свободных параметров. При этом всякое решение системы (7.4) удовлетворяет условию $\det \mathbf{\Gamma} = 0$.

◀ Пусть Γ_{12}, Γ_{21} и Γ_{13}, Γ_{31} выбраны в качестве свободных параметров. Из первого и третьего уравнений системы (7.4) следуют равенства

$$\Gamma_{23} = \frac{\Gamma_{13}\Gamma_{21}}{\Gamma_{21} - \Gamma_{31}}, \quad \Gamma_{32} = \frac{\Gamma_{12}\Gamma_{31}}{\Gamma_{31} - \Gamma_{21}}. \tag{7.5}$$

Подставляя во второе уравнение в (7.4) вместо Γ_{23}, Γ_{32} правые части уравнений (7.5), получим тождество. Следовательно, уравнения (7.5) эквивалентны трем уравнениям (7.4).

Для доказательства второй части утверждения леммы заметим, что из (7.5) следует равенство

$$\frac{\Gamma_{13}\Gamma_{21}}{\Gamma_{23}} = -\frac{\Gamma_{12}\Gamma_{31}}{\Gamma_{32}}.$$

Теперь условие $\det \mathbf{\Gamma} = 0$ очевидно в силу формул (7.2). ▶

Example 6 Легко проверить, что если $\Gamma_{12} = \Gamma_{13} = \Gamma_{21} = 1$, $\Gamma_{31} = 2$, $\Gamma_{23} = t$ и $\Gamma_{32} = -2t$, то матрица $\mathbf{\Gamma}$ является вырожденной при любом $t \in \overline{\mathbb{R}}$. При этом, подстановка данных значений в левые части первого и третьего уравнений в (7.4) дает

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{-2t} = \frac{t-1}{2t}, \qquad \frac{1}{t} + \frac{2}{1} = \frac{2t+1}{t}.$$

Заметим, что уравнения (7.4) выполнены только при $t = -1$.

Можно показать [1], что, с точностью до замены независимых переменных вида (7.3), решения системы трех алгебраических уравнений (7.4) параметризуются тремя функциями одной переменной:

$$\frac{1}{\Gamma_{31}} = X + Z = -\frac{1}{\Gamma_{13}}, \quad \frac{1}{\Gamma_{23}} = Y - Z = \frac{1}{\Gamma_{32}}, \quad \frac{1}{\Gamma_{12}} = X + Y = \frac{1}{\Gamma_{21}},$$

где $X(x)$, $Y(y)$, $Z(z)$ –произвольные функции своего аргумента.

Отметим, что из уравнений Дарбу (7.1) следует

$$\partial_z \Gamma_{12}\Gamma_{21} = \partial_x \Gamma_{23}\Gamma_{32} = \partial_y \Gamma_{13}\Gamma_{31} = \det \mathbf{\Gamma}$$

и что в силу формулы (7.2) вырожденная матрица $\mathbf{\Gamma}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{\Gamma}^3 = \tau \mathbf{\Gamma}, \quad \tau = \Gamma_{13}\Gamma_{31} + \Gamma_{21}\Gamma_{12} + \Gamma_{32}\Gamma_{23}.$$

Вспомогательные линейные уравнения.

Уравнения первого порядка (7.1) с квадратичной нелинейностью сводятся к линейным уравнениям второго порядка на функции u, v, w при помощи следующих замен:

$$\Gamma_{12} = \frac{u_y}{v-u},\ \Gamma_{13} = \frac{u_z}{w-u},\ \Gamma_{21} = \frac{v_x}{u-v},\ \Gamma_{23} = \frac{v_z}{w-v},\ \Gamma_{31} = \frac{w_x}{u-w},\ \Gamma_{32} = \frac{w_y}{v-w}. \tag{7.6}$$

Некое подобие замены сводящей уравнение Риккати с квадратичной нелинейностью к линейному уравнений Штурма-Лиувилля второго порядка.

Лемма 2(7). Пусть выполнены уравнения (7.6). Тогда функции Γ_{ij} удовлетворяют системе уравнений (7.1), а функции u, v, w – системе уравнений второго порядка

$$\begin{gathered} w_{xy} + (\Gamma_{32} - \Gamma_{32}\Gamma_{21}/\Gamma_{31})\, w_x + (\Gamma_{31} - \Gamma_{31}\Gamma_{12}/\Gamma_{32})\, w_y = 0, \\ u_{yz} + (\Gamma_{13} - \Gamma_{13}\Gamma_{32}/\Gamma_{12})\, u_y + (\Gamma_{12} - \Gamma_{12}\Gamma_{23}/\Gamma_{13})\, u_z = 0, \\ v_{zx} + (\Gamma_{21} - \Gamma_{21}\Gamma_{13}/\Gamma_{23})\, v_z + (\Gamma_{23} - \Gamma_{23}\Gamma_{31}/\Gamma_{21})\, v_x = 0. \end{gathered} \tag{7.7}$$

◀ Рассмотрим пару уравнений системы (7.6)

$$w_y + \Gamma_{32} w = \Gamma_{32} v, \qquad w_x + \Gamma_{31} w = \Gamma_{31} u.$$

Дифференцируя первое уравнение системы по y, а второе по x, получим

$$\begin{gathered} w_{xy} + \Gamma_{32,x} w + \Gamma_{32} w_x - \Gamma_{32,x} v - \Gamma_{32} v_x = 0, \\ w_{xy} + \Gamma_{31,y} w + \Gamma_{31} w_y - \Gamma_{31,y} u - \Gamma_{31} u_y = 0. \end{gathered} \tag{7.8}$$

К первым производным функции w слева привлекаем уравнения данной системы, а для производных функций u, v справа привлекаем уравнения из других пар:

$$\begin{gathered} \Gamma_{32} w_x = \Gamma_{32}\Gamma_{31}(u-w), \quad \Gamma_{31} w_y = \Gamma_{31}\Gamma_{32}(v-w), \\ \Gamma_{32} v_x = \Gamma_{32}\Gamma_{21}(u-v), \quad \Gamma_{31} u_y = \Gamma_{31}\Gamma_{12}(v-u). \end{gathered}$$

Тогда, вычитая первое уравнение в (7.8) из второго, получим пару уравнений на функции Γ_{ij}

$$\Gamma_{32,x} = \Gamma_{31,y}, \quad \Gamma_{32,x} = \Gamma_{32}\Gamma_{21} + \Gamma_{31}\Gamma_{12} - \Gamma_{32}\Gamma_{31}$$

с помощью которых, в свою очередь, получаются уравнения на функции u, v, w. Действительно, взяв первое равенство в (7.8), имеем

$$\begin{gathered} w_{xy} + \Gamma_{32} w_x - \Gamma_{32,x}(v-w) - \Gamma_{32} v_x \\ = w_{xy} + \Gamma_{32} w_x - \Gamma_{32,x}(v-w) - \Gamma_{32}\Gamma_{21}(u-v) \\ = w_{xy} + \Gamma_{32} w_x - \frac{\Gamma_{32,x}}{\Gamma_{32}} w_y - \Gamma_{32}\Gamma_{21}(u-w) + \Gamma_{32}\Gamma_{21}(v-w) \\ = w_{xy} + \left(\Gamma_{32} - \frac{\Gamma_{32}\Gamma_{21}}{\Gamma_{31}}\right) w_x + \left(\Gamma_{31} - \frac{\Gamma_{31}\Gamma_{12}}{\Gamma_{32}}\right) w_y. \end{gathered}$$

Оставшиеся уравнения можно получить аналогично. Лемма доказана. ▶

8 ЛЕКЦИЯ 8: Три волны:(матричная спектральная теория).

В случае общего положения спектральная задача Захарова-Шабата порядка $l \geq 2$ для вектор функции $\vec{\psi} = (\psi^1, \dots, \psi^l)^\top$: приводится к следующему виду:

$$\begin{array}{c} \vec{\psi}_t = V(t,\lambda)\vec{\psi}, \quad V(t,\lambda) = \alpha\lambda + \widetilde{V}(t), \quad \alpha = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \\ \alpha_{ij} = \alpha_i - \alpha_j, \quad \lambda_j = \alpha_j \lambda, \quad \lambda_{ij} = \lambda_i - \lambda_j \quad i,j = 1,\ 2,\ \dots,\ l. \end{array} \tag{8.1}$$

Всего из этих l дополнительных параметров λ_j $l-1$ их разностей являются существенными. Условимся, если не оговорено противное, считать, что матричный потенциал приведён к бездиагональному виду:

$$\widetilde{V} = \begin{bmatrix} 0 & v_{12} & \dots & v_{1l} \\ v_{21} & 0 & \dots & v_{2l} \\ & & \dots\dots & \\ v_{l1} & v_{l2} & \dots & 0 \end{bmatrix}. \tag{8.2}$$

зануление диагонали $v_{jj} = 0,\ \forall j \in [m]$ связано с наличием здесь калибровочных замен $\psi^j \to a_j(t)\psi^j$. переход к однородным проективным координатам

$$\psi^1 : \psi^2 : \dots : \psi^l \tag{8.3}$$

мы получаем

Лемма 1 Пусть $\alpha_i \neq \alpha_j,\ \forall\ i \neq j$. Тогда существует пара формальных степенных рядов $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$

$$F = (f_{ij}) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{\lambda^n},\ (f_{jj} = 1) \quad \text{and} \quad G = (g_{ij}) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_n}{\lambda^n},\ (g_{jj} = 1) \tag{8.4}$$

удовлетворяющих следующим матричным дифференциальным уравнениям:

$$\begin{array}{ll} \dfrac{d}{dt}F + FF^d - VF = 0, & F^d \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{diag}\left(\lambda_1 + \sum\limits_{j\neq 1} v_{1j}f_{j1}, \dots, \lambda_m + \sum\limits_{j\neq m} v_{mj}f_{jm}\right); \\ \dfrac{d}{dt}G - G^dG + GV = 0, & G^d \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{diag}\left(\lambda_1 + \sum\limits_{j\neq 1} g_{1j}v_{j1}, \dots, \lambda_m + \sum\limits_{j\neq m} g_{mj}v_{jm}\right). \end{array} \tag{8.5}$$

Коэффициенты F_n и G_n формальных рядов (8.4), являются однородными дифференциальными многочленами от элементов v_{ij} матрицы (**??**) и однозначно определяются уравнениями (8.5) при условии $f_{jj} = g_{jj} = 1,\ \forall j$. В частности

$$G_1 = -F_1 = (u_{ij}), \quad u_{ii} = 0, \quad u_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v_{ij}}{\alpha_{ij}}, \quad \forall\ i \neq j \tag{8.6}$$

Let us discuss a correspondence matrix solutions F and G of equations (**??**) (**??**), respectively, defined above in Lemma 2 and Lemma 2'. Denote $H = F^{-1}$ and differentiate the formula $HF = 1$ one gets

$$H_xF + H(VF - F\ f) = 0\ \Leftrightarrow\ H_x + HV = fH.$$

It is clear that a structure of the last equation keeps unchanged if we replace H by hH where the matrix h is diagonal. Apply now Lemma 2' and use uniqueness properties which provided by $\lambda = \infty$ normalization, one gets

Theorem [g1.tex:05sep2007] Let $F_{\alpha\beta}$ is the algebraic complement of the element $f_{\alpha\beta}$ of the matrix $F = (f_{ij})$ defined by Lemma **??**. Then elements of the matrix $G = (g_{ij})$ from Lemma 2' are

$$g_{ij} = \frac{F_{ji}}{F_{ii}}.$$

Thus in order to find the matrix G one can use the matrix составленную из алгебраических дополнений злементов матрицы F. For example, in the case $l = 3$ we find

$$g_{ij} = \frac{f_{ik}f_{kj} - f_{ij}}{1 - f_{kj}f_{jk}} \;\Rightarrow\; g_{12} = \frac{f_{13}f_{32} - f_{12}}{1 - f_{32}f_{23}}, \quad g_{13} = \frac{f_{12}f_{23} - f_{13}}{1 - f_{32}f_{23}}.$$

and $g_{ij} = -f_{ij}$ in the case $l = 2$.

Список литературы

[1] Р.Ч. Кулаев, А.Б. Шабат, "Система Дарбу и разделение переменных в задаче Гурса для уравнения третьего порядка в $\mathbb{R}^3$," *UMJ*, to appear

[2] А.Б. Шабат, В.Э. Адлер, "Матрицы Картаны в теории цепочки Тоды-Дарбу," *ТМФ*, март 2018.

[3] В.Э. Адлер, "11 лекций,"

[4] Р.Н.Гарифуллин, А.Шабат, "О структуре полиномиальных законов сохранения," *ТМФ*, **161**(3): 1589-97, 2009

[5] Г.Глэдвелл,"Обратные задачи теории колебаний," М.-Ижевск, 2008.

[6] В.Э.Адлер, А.Б.Шабат, Р.И.Ямилов, "Симметрийный подход к проблеме интегрируемости *ТМФ*, **125**(3): 355–424, 2000.

[7] Ian Macdonald,"Symmetric functions.." Oxford, 1998.

[8] W.Fulton, J.Harris,"Representation theory," NY 1991.

[9] В.В. Козлов, Д.В.Трещёв, "Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем с экспоненциальным взаимодействием," *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**(3): 537–556, 1989.

[10] Катанаев М. "Геометрические методы в математической физике," МИАН, 2016

[11] А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов, "Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана," *Preprint*, Ufa, 1981, pages 1-22.

[12] H.S. Wall, "Analytic theory of continued fraction," NY, 1948.

[13] L.Eisenhart, "A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces," 1909 (NY 2006?).

[14] Vito Volterra, "Математическая теория борьбы за существование," (Paris–1931), М., 1976