2 Законы сохранения

Плотности и токи · Модифицированное уравнение КдФ · Дифференциальные подстановки · Формальное решение уравнения Риккати (обращение преобразования Миуры) · Производящая функция для законов сохранения · Полная производная · Эволюционная производная · Вариационная производная (оператор Эйлера) · Производная Фреше (оператор линеаризации) · Интегрирование по частям

2.1 Сохраняющиеся величины

Из уравнения КдФ

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x$$

можно получить ряд следствий, имеющих вид

$$D_t(\rho) = D_x(\sigma),$$

где ρ и σ функции от u и частных производных u по x, а D_t, D_x обозначают полные производные по t и по x. Соотношения такого вида называются *законами сохранения*, функция ρ называется *плотностью*, а σ *током* закона сохранения.

Если сама функция ρ имеет вид $\rho = D_x(\phi)$, для некоторой функции ϕ, то в качестве σ можно взять $\sigma = D_t(\phi)$. Законы сохранения такого типа не представляют интереса и называются *тривиальными*. Плотности ρ_1, ρ_2, отличающиеся на полную производную $D_x(\phi)$, считаются эквивалентными,

$$\rho_1 \sim \rho_2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho_1 - \rho_2 \in \operatorname{Im} D_x.$$

Несколько первых законов сохранения уравнения КдФ найти нетрудно. Во-первых, само уравнение имеет вид закона сохранения:

$$D_t(u) = D_x(u_{xx} - 3u^2).$$

Во-вторых, если умножить уравнение на $2u$, то в правой части опять получится полная производная и мы получим:

$$D_t(u^2) = D_x(2uu_{xx} - u_x^2 - 4u^3).$$

Далее, есть ещё и такое соотношение:

$$D_t(2u^3 + u_x^2) = D_x(2u_x u_{xxx} - u_{xx}^2 + 6u^2 u_{xx} - 12uu_x^2 - 9u^4).$$

Что это даёт? Предположим, что мы рассматриваем периодические (или, в частном случае, быстроубывающие) решения уравнения КдФ. Тогда интеграл от $D_x(\sigma)$ по периоду (по всей оси x) обращается в 0, следовательно, интеграл от ρ оказывается сохраняющейся величиной:

$$D_t\left(\int_0^T \rho\,dx\right) = \int_0^T D_x(\sigma)\,dx = \sigma\Big|_0^T = 0.$$

$$
\begin{aligned}
\rho_1 &= u,\\
\rho_2 &= u^2,\\
\rho_3 &= 2u^3 + u_1^2,\\
\rho_4 &= 5u^4 + 10uu_1^2 + u_2^2,\\
\rho_5 &= 14u^5 + 70u^2u_1^2 + 14uu_2^2 + u_3^2,\\
\rho_6 &= 42u^6 + 420u^3u_1^2 - 35u_1^4 + 126u^2u_2^2 - 20u_2^3 + 18uu_3^2 + u_4^2,\\
&\dots\\
\rho_{10} &= 4862u^{10} + 291720u^7u_1^2 - \dots + u_8^2 \quad \text{(всего 32 члена).}
\end{aligned}
$$

Таблица 1. Сохраняющиеся плотности для уравнения КдФ, $u_k = \partial_x^k(u)$.

Например, отсюда следует, что график решения на рис. 5 ограничивает в верхней и нижней полуплоскостях области равной площади, для любого момента t (поскольку это верно для начального условия).

Таким образом, закон сохранения можно рассматривать как обобщение понятия первого интеграла из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Как известно из механики, конечномерные динамические системы с достаточно большим числом первых интегралов являются интегрируемыми. В частности, имеется теорема Лиувилля–Арнольда, о гамильтоновой системе с n степенями свободы и n независимыми первыми интегралами в инволюции. Эта теорема утверждает, что если поверхность уровня первых интегралов компактна, то она диффеоморфна n-мерному тору и решение представляет собой его квазипериодическую линейную обмотку. Это напоминает то, что наблюдается в описанных выше экспериментах. Конечно, уравнение КдФ не является конечномерной динамической системой, но можно предположить, что регулярное поведение решений также связано с первыми интегралами.

Действительно, вскоре после работы Забуски–Краскала было обнаружено, что у уравнения КдФ имеется бесконечно много законов сохранения, а потом была найдена и соответствующая гамильтонова структура (её мы рассмотрим на одной из следующих лекций). Первые 10 законов сохранения были найдены вручную, при помощи метода неопределённых коэффициентов. Этот результат частично воспроизведён в таблице 1, где, для краткости, введено обозначение $u_k = \partial_x^k(u)$, которое мы в дальнейшем будем часто использовать наравне с обозначениями $u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots$. Мы подробно разберём метод неопределённых коэффициентов на семинарских занятиях, так как он применим не только для уравнения КдФ, но и в более общей ситуации. Однако, в случае КдФ, полное описание плотностей удалось, в конце-концов, получить очень просто.

2.2 Преобразование Миуры

В 1968 г. было найдено следующее замечательное преобразование, связывающее решения двух нелинейных уравнений. Замены такого типа называются дифференциальными подстановками.

Утверждение 2.1 (Преобразование Миуры)**.** *Пусть функция $f(x,t)$ удовлетворяет модифицированному уравнению КдФ (мКдФ$^-$)*

$$f_t = f_{xxx} - 6(f^2+\lambda)f_x, \tag{2.1}$$

тогда функция

$$u = f_x + f^2 + \lambda \tag{2.2}$$

удовлетворяет уравнению КдФ $u_t = u_{xxx} - 6uu_x$.

Доказательство. Прямое вычисление:

$$\begin{aligned}
u &= f_x + f^2 + \lambda,\\
u_x &= f_{xx} + 2ff_x,\\
u_{xx} &= f_{xxx} + 2ff_{xx} + 2f_x^2,\\
u_{xxx} &= f_{xxxx} + 2ff_{xxx} + 6f_xf_{xx},\\
u_t &= f_{xt} + 2ff_t\\
&= f_{xxxx} - 6(f^2+\lambda)f_{xx} - 12ff_x^2 + 2f(f_{xxx} - 6(f^2+\lambda)f_x).
\end{aligned}$$

Остаётся подставить в уравнение для u и раскрыть скобки. □

Замена (2.2) определяет функцию u по заданной функции f. Для того, чтобы найти f по заданной u, необходимо решить уравнение Риккати. Его решение, естественно, содержит произвол в виде постоянной интегрирования (например, можно задавать произвольное начальное значение $f(0,t)$ при $x=0$). Наше вычисление показывает, что зависимость этой постоянной от t можно выбрать так, чтобы решение $f(x,t)$ удовлетворяло мКдФ. Для этого нужно проверить, что уравнения (2.1) и (2.2) совместны, то есть, выполняется условие равенства смешанных производных $f_{xt} = f_{tx}$. Легко видеть, что если u удовлетворяет уравнению КдФ, то это действительно так, нужно лишь немного изменить порядок выписанных формул.

Построим *формальное* решение уравнения (2.2) в виде ряда

$$f(z) = -\frac{z}{2} + F_0 + \frac{F_1}{z} + \frac{F_2}{z^2} + \cdots, \quad z^2 = -4\lambda. \tag{2.3}$$

При подстановке в (2.2) члены с z^2 сокращаются, коэффициент при z^1 даёт $F_0 = 0$, а остальные коэффициенты эквивалентны рекуррентным соотношениям

$$F_1 = -u, \qquad F_{n+1} = D_x(F_n) + \sum_{s=1}^{n-1} F_sF_{n-s}, \quad n = 1,2,\dots. \tag{2.4}$$

Отсюда все F_n однозначно находятся в виде многочленов от u и её производных. Несколько первых коэффициентов приведены в таблице 2 (скобки просто группируют члены одинаковой степени).

Утверждение 2.2. *Рекуррентные соотношения (2.4) порождают последовательность плотностей для уравнения КдФ.*

$$
\begin{aligned}
F_1 &= -u,\\
F_2 &= -u_1,\\
F_3 &= -u_2 + u^2,\\
F_4 &= -u_3 + 4uu_1,\\
F_5 &= -u_4 + (6uu_2 + 5u_1^2) - 2u^3,\\
F_6 &= -u_5 + (8uu_3 + 18u_1u_2) - 16u^2u_1,\\
F_7 &= -u_6 + (10uu_4 + 28u_1u_3 + 19u_2^2) - (30u^2u_2 + 50uu_1^2) + 5u^4.
\end{aligned}
$$

Таблица 2. Коэффициенты разложения (2.3).

Доказательство. Заметим, что f является плотностью простейшего закона сохранения для уравнения мКдФ (так как правая часть (2.1) есть полная производная по x). При подстановке формального ряда (2.3) в (2.1), равенство выполняется тождественно по параметру z, следовательно все коэффициенты этого ряда являются плотностями законов сохранения, но уже для уравнения КдФ, поскольку они выражены через переменную u. □

Обратим внимание, что вычисленные плотности не совпадают с плотностями из таблицы 1. Во-первых, оказывается, что многочлены F_n с чётными номерами являются полными производными по x (это будет доказано позже). Таким образом, все F_{2n} это тривиальные плотности, которые пока играют роль лишь вспомогательных выражений, нужных для подстановки в рекуррентную формулу. Во-вторых, плотности F_{2n+1} хотя и нетривиальны, но отличаются от выписанных ранее членами, эквивалентными по модулю D_x.

Разложение (2.3), (2.4) играет очень важную роль в теории уравнения КдФ и мы к нему ещё вернёмся. Однако, сейчас следует немного отклониться в сторону. Остаток лекции будет посвящен формализации проделанных вычислений.

2.3 Дифференциальная алгебра

Для простоты, будем предполагать, что основным объектом изучения является скалярное эволюционное уравнение относительно функции $u(x,t)$

$$u_t = f(x, u, u_1, \dots, u_n), \quad u_j = \partial_x^j(u). \tag{2.5}$$

При различных вычислениях, часто бывает удобно трактовать функцию $u = u_0$ и её производные u_j не как функции от x, t, а как независимые, или динамические, переменные. Пусть $\mathcal{F}$ обозначает множество гладких функций $a(x, u_0, \dots, u_k)$ от конечного числа переменных. Такие функции подчиняются определённым правилам дифференцирования, которые формализуют правила вычисления производных от сложной функции и исключения производных по t в силу уравнения.

Определение 2.1. Пусть $\partial_j = \partial/\partial u_j$. Оператором полной производной по x называется формальное векторное поле

$$D_x = \partial_x + u_1\partial_0 + u_2\partial_1 + \dots + u_{j+1}\partial_j + \dots \tag{2.6}$$

Эволюционной производной в силу уравнения (2.5) называется векторное поле

$$\nabla_f = D_t = f\partial_0 + D_x(f)\partial_1 + \dots + D_x^j(f)\partial_j + \dots \tag{2.7}$$

Оператором линеаризации, или производной Фреше от функции $g(x, u_0, \dots, u_k) \in \mathcal{F}$, называется дифференциальный оператор

$$g_* = \partial_0(g) + \partial_1(g)D_x + \dots + \partial_k(g)D_x^k. \tag{2.8}$$

Нетрудно видеть, что хотя суммы (2.6), (2.7) содержат бесконечное число слагаемых, действие этих векторных полей на функции из $\mathcal{F}$ определено корректно и согласовано с подстановкой вместо u_j производных $\partial_x^j(U)$ от произвольного гладкого решения уравнения (2.5). Оператор линеаризации можно определить также равенством

$$g_*(f) = \frac{d}{d\varepsilon}(g[u+\varepsilon f])\Big|_{\varepsilon=0}.$$

Следующие свойства введённых операторов легко доказываются (позже мы продолжим этот список тождеств).

Утверждение 2.3. *Выполняются тождества, для любых $f, g \in \mathcal{F}$:*

$$[\partial_x, D_x] = 0, \quad [\partial_0, D_x] = 0, \quad [\partial_j, D_x] = \partial_{j-1}, \quad j > 0, \tag{2.9}$$

$$[D_x, \nabla_f] = 0, \quad \nabla_f(g) = g_*(f), \quad (fg)_* = fg_* + gf_*, \quad D_x(g)_* = D_x g_*. \tag{2.10}$$

При работе с законами сохранения оказывается полезным следующий оператор. Как и в случае операторов D_x, ∇_f, он задается формальной суммой, но его действие на функции из $\mathcal{F}$ корректно определено.

Определение 2.2. Вариационной производной, или оператором Эйлера, называется оператор

$$\frac{\delta}{\delta u} = \mathsf{E} = \partial_0 - D_x\partial_1 + D_x^2\partial_2 - \dots + (-1)^j D_x^j \partial_j + \dots \tag{2.11}$$

Для этого оператора отметим тождество

$$\mathsf{E}(f) = f_*^\dagger(1),$$

где операция сопряжения † для дифференциальных операторов $\mathcal{F}[D_x]$ определяется соотношениями

$$a^\dagger = a, \quad a \in \mathcal{F}, \quad D_x^\dagger = -D_x, \quad (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger,$$

в частности, если $A = \sum a_j D_x^j$, то $A^\dagger = \sum (-1)^j D_x^j a_j$.

Основное свойство вариационной производной сформулировано в следующем утверждении.

Утверждение 2.4 (Образ полной производной)**.** *Для функции $a \in \mathcal{F}$ существует функция $b \in \mathcal{F}$ такая, что $a = D_x(b)$, если и только если $\mathsf{E}(a) = 0$:*

$$\operatorname{Im} D_x = \ker \mathsf{E}\,. \tag{2.12}$$

Итак, чтобы выяснить, является ли ρ плотностью закона сохранения, достаточно проверить равенство $\mathsf{E}(D_t(\rho)) = 0$. Следует отметить, что при этом самым нетривиальным этапом может оказаться не вычисление левой части, а её сравнение с нулём. Всё зависит от того, что из себя представляют рассматриваемые функции, например, уже для тригонометрических нужно помнить о некоторых тождествах. Однако, в наших примерах мы, в основном, будем работать с полиномами, где всё отлично работает.

Формула (2.12) даёт только ответ о разрешимости уравнения $a = D_x(b)$, относительно функции $b \in \mathcal{F}$. Опишем алгоритм *интегрирования по частям*, позволяющий найти такую функцию, либо доказать, что её не существует. Он основан на следующих очевидных свойствах.

Если $a = D_x(b(x, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}))$, то:

1) a зависит от $x, u_0, \dots, u_n$;

2) a линейна по старшей переменной u_n.

Пусть дана функция a. Определим набор переменных, от которых она зависит, пусть это $x, u_0, \dots, u_n$, $n > 0$. Если u_n входит нелинейно, то есть $\partial_n^2(a) \neq 0$, то $a \notin \operatorname{Im} D$ и вычисление заканчивается. В противном случае, $a = pu_n + q$, где функции $p = \partial_n(a)$ и q не зависят от u_n. Тогда $a = D_x(P) + \tilde{a}$, где $P = \int p\, du_{n-1}$ и $\tilde{a}$ остаток, не зависящий от u_n.

Применяем то же самое рассуждение к $\tilde{a}$ и так далее. Если мы так и не наткнёмся на препятствие в виде нелинейности по старшей переменной, то через конечное число шагов переменные u_j с $j > 0$ кончатся. Если остаток зависит от u_0, то функции b не существует, если же остаток зависит только от x, то надо проинтегрировать его и всё сложить.

2.4 Уравнение Бюргерса

Рассмотрим еще один характерный пример, уравнение Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x. \tag{2.13}$$

Оказывается, что оно, как и уравнение КдФ, допускает дифференциальную подстановку.

Утверждение 2.5 (Подстановка Коула–Хопфа)**.** *Уравнение (2.13) связано с уравнением теплопроводности $\psi_t = \psi_{xx}$ заменой $u = \psi_x/\psi$.*

Доказательство. Прямое вычисление:

$$u_t = \left(\frac{\psi_x}{\psi}\right)_t = \left(\frac{\psi_t}{\psi}\right)_x = \left(\frac{\psi_{xx}}{\psi}\right)_x = (u_x + u^2)_x. \qquad \square$$

Как видим, здесь вместо модифицированного уравнения возникло просто линейное уравнение. Из любого решения уравнения теплопроводности можно по явной формуле получить решение уравнения Бюргерса. Уравнения такого типа называются линеаризуемыми, или C-интегрируемыми (от слова *change*, то есть, интегрируемые посредством замены переменных).

По аналогии с уравнением КдФ, можно предположить, что уравнение Бюргерса обладает бесконечной последовательностью законов сохранения. Оказывается, однако, что ситуация прямо противоположная. Нам понадобится следующее общее тождество для законов сохранения.

Утверждение 2.6. *Пусть ρ есть плотность закона сохранения для эволюционного уравнения $u_t = f$. Тогда функция $r = \mathsf{E}(\rho)$ удовлетворяет уравнению*

$$D_t(r) + f_*^\dagger(r) = 0. \tag{2.14}$$

Доказательство. Применяя E к равенству $D_t(\rho) = D_x(\sigma)$, получаем

$$\mathsf{E}(D_t(\rho)) = \mathsf{E}(\rho_*(f)) = (\rho_*(f))_*^\dagger(1) = 0.$$

Распишем последнее равенство. Имеем, пользуясь тождествами (2.10),

$$(\rho_*(f))_* = \Big(\sum_i \partial_i(\rho) D_x^i(f)\Big)_* = \sum_i \partial_i(\rho) D_x^i f_* + \sum_{i,j} D_x^i(f)\partial_i\partial_j(\rho) D_x^j.$$

Первое слагаемое равно $\rho_* f_*$, тогда получаем далее

$$\begin{aligned}
0 = (\rho_*(f))_*^\dagger(1) &= f_*^\dagger \rho_*^\dagger(1) + \sum_{i,j}(-1)^j D_x^j(D_x^i(f)\partial_i\partial_j(\rho))\\
&= f_*^\dagger(r) + \sum_j (-1)^j D_x^j\Big(\sum_i D_x^i(\partial_i\partial_j(\rho))\Big) = f_*^\dagger(r) + \sum_j (-1)^j D_x^j \nabla_f(\partial_j(\rho))\\
&= f_*^\dagger(r) + \nabla_f\Big(\sum_j (-1)^j D_x^j(\partial_j(\rho))\Big) = f_*^\dagger(r) + \nabla_f(r),
\end{aligned}$$

что и требуется. □

Утверждение 2.7. *Уравнение (2.13) имеет лишь один закон сохранения с плотностью $\rho = u$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала законы сохранения с плотностью вида $\rho = \rho(x,u)$. По определению, для них имеем соотношение

$$D_t(\rho) = \rho_u(u_{xx} + 2uu_x) \in \operatorname{Im} D_x.$$

Интегрируем по частям:

$$D_t(\rho) = D_x(\rho_u u_x) - (\rho_{xu} + \rho_{uu}u_x)u_x + 2\rho_u u u_x.$$

Член с u_x^2 сокращается, только если $\rho_{uu} = 0$, то есть, $\rho = a(x)u$. Далее,

$$D_t(\rho) \sim -a'(x)u_x + 2a(x)uu_x = D_x(-a'(x)u + a(x)u^2) + a''(x)u + a'(x)u^2,$$

откуда следует $a' = 0$.

Допустим теперь, что имеется закон сохранения с плотностью $\rho(x,u,\dots,u_k)$, где $k \ge 1$. При этом, если ρ зависит от u_k линейно, то можно, проинтегрировав по частям, перейти к эквивалентной плотности, не зависящей от u_k, поэтому будем считать, что $\rho_{kk} \neq 0$. Тогда $r = \mathsf{E}(\rho) = (-1)^k \rho_{kk} u_{2k} + \dots$, где многоточие обозначает члены младшего порядка по производным. Подставляя это в тождество (2.14) и следя только за старшими производными, получаем

$$D_t(r) + f_*^\dagger(r) = (D_t + D_x^2)(r) + \dots = 2\partial_{2k}(r) u_{2k+2} + \dots,$$

то есть, $\rho_{kk} = 0$, вопреки предположению. □

Подводя итог этой лекции, можно сказать, что наличие у уравнения бесконечной последовательности законов сохранения сколь угодно высокого порядка является признаком его интегрируемости. В то же время, имеются интегрируемые уравнения, у которых законов сохранения конечное число.

2.5 Задачи. Символьные вычисления

Задача 2.1. (1 балл) Используя вариационную производную или алгоритм интегрирования по частям, выясните, принадлежит ли $\operatorname{Im} D_x$ функция

$$a = \sum_{s=0}^{n} u_s u_{n-s},$$

в зависимости от числа n. Если $a \in \operatorname{Im} D_x$, то найдите функцию b такую, что $a = D_x(b)$.

Задача 2.2. (1 балл) Обобщите утверждение 2.7 и покажите, что эволюционное уравнение четного порядка $u_t = f(x, u_0, \dots, u_{2n})$ не может иметь законов сохранения с плотностями $\rho(x, u, \dots, u_k)$, где $\rho_{kk} \neq 0$ и $k > n$.

Задача 2.3. (2 балла) Рассмотрим 2-компонентные эволюционные системы

$$u_t = f(x, u_0, v_0, \dots, u_n, v_n), \quad v_t = g(x, u_0, v_0, \dots, u_n, v_n),$$

где u_j, v_j, как и раньше, обозначают производные по x. Обобщить на этот случай определения динамических переменных, операторов D_x, D_t, $_*$ и E.

Упражнения на компьютере. *Mathematica* можно использовать не только для численного счёта и рисования картинок. Реализация вычислений из раздела 2.3 также не представляет труда, хотя и требует более глубокого знакомства с языком. Поэтому, на этот раз большая часть задач приводится с решениями.

Действие операторов полной производной, линеаризации и вариационной производной можно определить так:

(2.15)
```
vars[f_]:= Union[Cases[f,_u,{0,\[Infinity]}]]
dif[f_]:= Plus@@(D[f,#]d[#]&/@vars[f])
Dx[f_]:= D[f,x]+dif[f]/.d[u[k_]]:>u[k+1]
Dx[f_,k_]:= Nest[Dx,f,k]
star[g_,f_]:= dif[g]/.d[u[k_]]:>Dx[f,k]
vard[f_]:= Expand[Plus@@
   ((-1)^#[[1]]*Dx[D[f,#],#[[1]]]&/@vars[f])]
```

При запуске этой ячейки ничего не вычисляется, это просто определения. Здесь `u[k]` обозначает динамическую переменную u_k; вспомогательная функция `vars` возвращает список динамических переменных в выражении; вторая строчка служит определением дифференциала

$$df = \partial_0(f)du_0 + \partial_1(f)du_1 + \partial_2(f)du_2 + \dots\ .$$

Далее идёт определение $D_x(f)$, $D_x^k(f)$, $g_*(f)$ и $\delta d/\delta u$.

Смысл некоторых конструкций *Mathematica*, используемых в этом фрагменте, поясним на примерах:

`f@@{a,b,c}`	даёт	`f[a,b,c]`
`f/@{a,b,c}`	даёт	`{f[a],f[b],f[c]}`
`g[x+#]+#^2&[y+z]`	даёт	`g[x+y+z]+(y+z)^2`
`f/.g[t_]:>t^2`	одноразовая замена всех `g` в выражении `f`	
`g[30]//.g[t_]/;t>0:>t*g[t-1]`	итерируемая замена	

При необходимости, разберитесь с этими обозначениями при помощи контекстной справки.

Задача 2.4. Выполнить проверку преобразования Миуры (2.2).

Решение. Пусть переменная u удовлетворяет уравнению мКдФ, а результат преобразования Миуры обозначим U:

```
ut= u[3] -6(u[0]^2 +a)u[1];
U= u[1] +u[0]^2 +a;
Expand[-star[U,ut] +Dx[U,3] -6U*Dx[U]]
```

Если всё правильно, то в результате выполнения последней команды должен получиться 0.

Задача 2.5. Вычислить коэффициенты ряда (2.3) по рекуррентным формулам (2.4), вплоть до f_{15}. Проверить, применяя вариационную производную, что все f_{2n} являются полными производными по x, а f_{2n-1} являются нетривиальными плотностями законов сохранения для уравнения КдФ.

Решение. Делаем вычисления в цикле и составляем списки многочленов f_n отдельно с нечётными и чётными номерами:

```
M= 15;
f[1]= -u[0];
Do[f[n+1]= Expand[Dx[f[n]]+Sum[f[s]f[n-s],{s,1,n-1}]],{n,1,M-1}]
odd= Table[f[n],{n,1,M,2}]
even= Table[f[n],{n,2,M,2}]
```

В следующей ячейке выполним следующие команды:

```
vard/@even
vard/@odd
oddt= star[odd, u[3]-6u[0]u[1]];
vard/@oddt
```

Первая строчка выдаст список из нулей, это означает, что $f_{2n} \in \operatorname{Im} D_x$. Наоборот, вторая строчка выдаст список с ненулевыми элементами, то есть, f_{2n-1} не лежат в образе D_x. Последняя строчка даёт нули, следовательно, $D_t(f_{2n-1}) \in \operatorname{Im} D_x$.

Задача 2.6. Реализовать алгоритм интегрирования по частям.

Решение. Определим вспомогательную функцию `ord`, возвращающую номер старшей переменной в выражении. Отметим, что конструкция `Module` это функция с локальными переменными, возвращающая последнее вычисляемое в ней выражение (если после него стоит точка с запятой, то результатом будет `Null`). Далее, функция `int[f]` возвращает пару выражений a, b, таких что $f = D_x(a) + b$, и остаток b дальше не интегрируется. Если $b = 0$, то это значит, что $f \in \operatorname{Im} D_x$.

```
ord[f_]:= Module[{v=vars[f]},
  If[v=={},-1,v[[-1]][[1]]]
 ]

int[f_]:= Module[{a=0,b=Expand[f],c,n},
  While[n=ord[b];
   And[n>0,
    c=D[b,u[n]];
    Expand[D[c,u[n]]]==0
   ],
   c=Integrate[c,u[n-1]];
   a=Expand[a+c];
   b=Expand[b-Dx[c]]
  ];
  If[ord[b]==-1,
   {Expand[a+Integrate[b,x]],0},
   {a,b}
  ]
 ]
```

Задача 2.7. (1 балл) Вычислить токи законов сохранения для уравнения КдФ, отвечающие плотностям f_{2n-1} из задачи 4.1 (при ручном счёте можно взять несколько первых плотностей из таблицы 1).

Задача 2.8. (1 балл) Получите несколько законов сохранения для самого уравнения мКдФ, применяя преобразование Миуры к уже найденным плотностям КдФ.