

1 Нелинейные волны

Дисперсия и диссипация · Решения в виде бегущей волны · Солитон Расселла · Цепочка Ферми–Паста–Улама · Разностная схема Забуски–Краскала · Непрерывный предел к уравнениям Буссинеска и КдФ · Упругое взаимодействие солитонов

1.1 Опрокидывание, дисперсия и диссипация

Простейшие линейные волновые уравнения

$$u_t = \omega u_x, \quad u_{tt} = \omega^2 u_{xx}$$

описывают волны произвольной формы, распространяющиеся с постоянной скоростью. Простейший нелинейный пример — уравнение Хопфа

$$u_t = uu_x. \quad (1.1)$$

Его решение с начальным условием $u(x, 0) = f(x)$ определяется неявной формулой

$$u(x, t) = f(x + u(x, t)t),$$

или, в параметрическом виде,

$$u(s, t) = f(s), \quad x(s, t) = s - f(s)t.$$

Нелинейность приводит к тому, что участки волны разной амплитуды движутся с разной скоростью, что приводит к её *опрокидыванию*. В некоторый момент профиль решения становится многозначным, как показано на рис. 1.

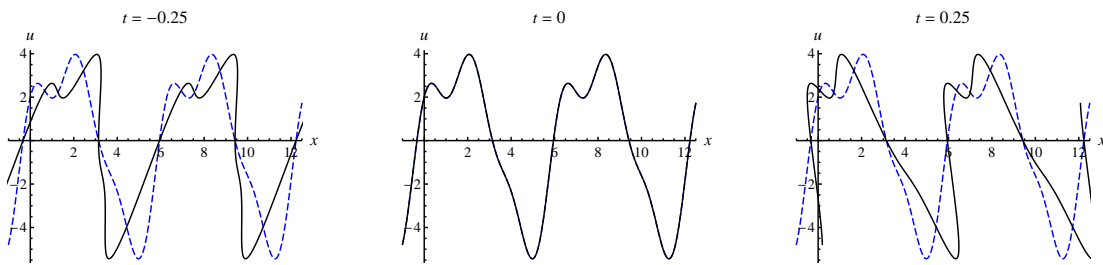


Рис. 1. Опрокидывание решения уравнения Хопфа $u_t = uu_x$.

В других моделях можно наблюдать еще два явления, приводящих к разрушению волн. *Дисперсией* называется расползание волнового пакета вследствие того, что скорость распространения волны зависит от волнового вектора. *Диссипацией* называется затухание амплитуды волны при $t \rightarrow \infty$. Оба эффекта объясняются в рамках линейной теории. Именно, любое линейное уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами $L[u(t, x)] = 0$ обладает решениями в виде плоских гармонических волн $u(t, x) = \exp(i(\langle k, x \rangle - \omega t))$. При этом, частота ω и волновой вектор k связаны вполне определённым алгебраическим уравнением $\Lambda(\omega, k) = 0$, которое называется *дисперсионным соотношением*. Например, для уравнений с одной

пространственной переменной прямой подстановкой $u = e^{i(kx - \omega t)}$ находим:

$$\begin{aligned} u_t = u_{xx} &\mapsto \omega = -ik^2, \\ u_t = u_{xxx} &\mapsto \omega = k^3, \\ u_{tt} = u_{xx} &\mapsto \omega^2 = k^2; \end{aligned}$$

в случае нескольких пространственных переменных имеем:

$$\begin{aligned} \text{волновое уравнение} & u_{tt} = \Delta u &\mapsto \omega^2 = \langle k, k \rangle, \\ \text{уравнение Клейна-Гордона} & u_{tt} = \Delta u - cu &\mapsto \omega^2 = \langle k, k \rangle + c, \\ \text{уравнение теплопроводности} & u_t = \Delta u &\mapsto \omega = -i\langle k, k \rangle, \\ \text{уравнение Шрёдингера} & iu_t = \Delta u &\mapsto \omega = -\langle k, k \rangle. \end{aligned}$$

Гиперплоскость $\langle k, x \rangle = \omega t + \text{const}$ называется поверхностью постоянной фазы, её смещение вдоль единичного вектора нормали $k/|k|$ происходит с *фазовой скоростью* $v_p = \omega/|k|$. Зависимость частоты от волнового вектора характеризует *групповая скорость* $v_g = \nabla_k(\omega)$. Если $v_g \neq \text{const}$, то разные моды распространяются с разной скоростью, что и приводит к явлению дисперсии. А диссипация имеет место, если частота имеет отрицательную мнимую часть: $\omega = \omega_R + i\omega_I$, $\omega_I < 0$, при этом волны экспоненциально затухают. Наоборот, закон дисперсии с $\omega_I > 0$ приводит к экспоненциальному росту и неустойчивости волн. Несмотря на то, что дисперсия и диссипация имеют линейное происхождение, они играют огромное значение и в нелинейных уравнениях. Если ограничиться, для простоты, скалярными эволюционными уравнениями с одной пространственной переменной

$$u_t = f(u, u_x, u_{xx}, \dots, \partial_x^n u),$$

то, как мы видели, член u_{xx} является диссипативным, u_{xxx} дисперсионным, uu_x опрокидывающим. По отдельности, эти слагаемые разрушают любое решение, но оказывается, что в некоторых нелинейных уравнениях бегущие волны все же возможны: происходит компенсация линейных членов нелинейными. Правда, это срабатывает не для всех решений, а лишь для волн определенной формы.

1.2 Решения в виде бегущей волны

Уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ) имеет вид

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x. \quad (1.2)$$

Найдём его простейшие решения в виде бегущей волны $u = y(x - ct)$. Подстановка в уравнение и двукратное интегрирование дают

$$y''' = 6yy' - cy' \quad \Rightarrow \quad (y')^2 = 2y^3 - cy^2 + c_1y + c_2 = 2R(y).$$

Отсюда функция $y(X)$ находится в неявном виде при помощи квадратуры:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2R(y)}} = X = x - ct.$$

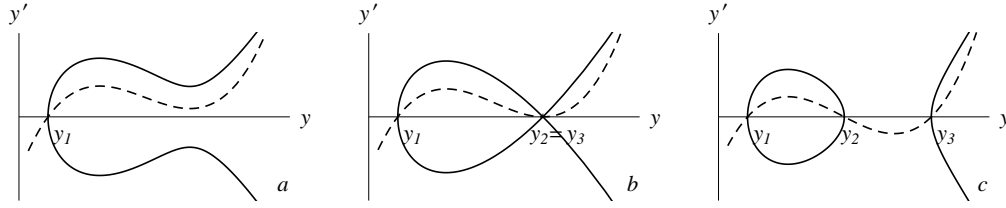


Рис. 2. Кривая $(y')^2 = 2R(y)$ (сплошная линия) и многочлен $R(y)$ (пунктир).

Выясним, как нужно выбирать многочлен R и начальное условие, чтобы решение было ограниченным на вещественной оси.

Фазовой траекторией системы в переменных (y, y') служит кубическая кривая $(y')^2 = 2R(y)$, показанная на рис. 2. Удобно перейти от коэффициентов к корням многочлена $R = (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)$. Если R имеет один вещественный нуль, то все решения неограничены и получаются друг из друга сдвигом $x \rightarrow x + x_0$. Если имеется три различных вещественных корня, $y_1 < y_2 < y_3$, то есть два решения, с точностью до сдвигов. Одно из них по-прежнему неограничено, а второе является периодической функцией, меняющейся в интервале $[y_1, y_2]$. Эту функцию можно выразить через эллиптическую функцию Якоби $\text{sn}(X, k)$ (см. задачу 1.2), и мы приходим к решению уравнения КдФ в виде *кноидальной волны*:

$$u(x, t) = a - 2bk^2 \text{sn}^2(b(x - x_0 - ct); k), \quad 6a = c - 4b(1 - 2k^2). \quad (1.3)$$

При этом, нули многочлена равны

$$y_1 = a - 2bk^2, \quad y_2 = a, \quad y_3 = a + 2b(1 - k^2). \quad (1.4)$$

Профиль кноидальной волны показан на рис. 3. Обратим внимание, что выбирая подходящее значение c , мы всегда можем положить $y_2 = 0$, так что решение будет лежать в интервале $-2bk^2 \leq u \leq 0$. Это является отражением следующего, легко проверяемого, свойства.

Утверждение 1.1 (Галилеевская инвариантность уравнения КдФ). *Если функция $u(x, t)$ является решением уравнения (1.2), то это же верно и для функции $\tilde{u}(x, t) = u(x - 6at, t) + a$, для произвольного параметра a .*

В пределе $k \rightarrow 1$ период кноидальной волны, равный $2 \int_{y_1}^{y_2} (2R(y))^{-1/2} dy$, стремится к бесконечности, и решение превращается в последовательность далеко разнесённых колоколообразных пичков. При $k = 1$ остается лишь один пичок, это и

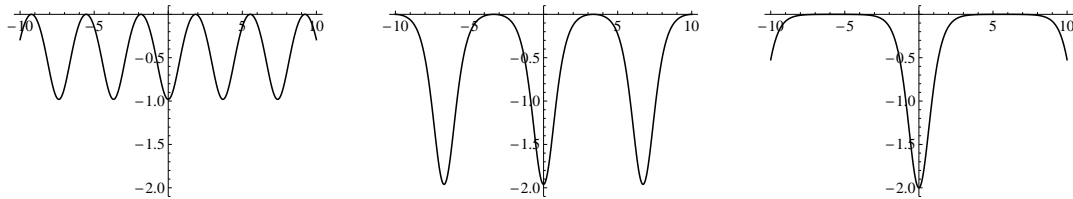


Рис. 3. Профиль решения (1.3) при $b = 1$, $a = 0$ и $k = 0.7$; 0.99 ; 0.9999 .

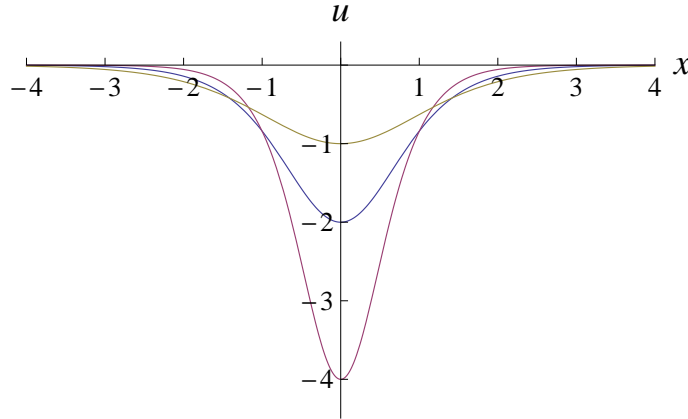


Рис. 4. Профиль солитона КдФ при $a^2 = 0.5; 1; 2$.

есть так называемый *солитон*, быстроубывающее решение уравнения КдФ, изображенное на рис. 3. Оно выражается через элементарные функции. Действительно, при $k = 1$ нули y_3 и y_2 сливаются и мы получаем *сепаратрису*, фазовую кривую, проходящую через седловую точку и разделяющую фазовые кривые разных типов (см. рис. 2b):

$$(y')^2 = 2y^2(y - y_1).$$

Решая это уравнение, получаем формулу для солитона

$$u = -\frac{2a^2}{\cosh^2(ax - 4a^3t + \delta)}. \quad (1.5)$$

Солитон часто изображают в виде горба, а не ямы, что, конечно, отвечает просто смене знака при нелинейном члене при замене $u \rightarrow -u$. Вообще, в уравнении КдФ все коэффициенты можно сделать любыми числами, при помощи растяжений переменных.

Для полноты, отметим, что при заменах $\delta \rightarrow \delta + i\pi$ и $a \rightarrow ia$, $\delta \rightarrow i\delta$ решение (1.5) остаётся вещественным, но теряет регулярность. В первом случае \cosh заменяется на \sinh , и мы получаем решение, отвечающее неограниченной ветви сепаратрисы на рис. 2b. Во втором случае \cosh заменяется на \cos , это решение отвечает тому предельному случаю, когда сливаются корни y_1 и y_2 . Наконец, при совпадении всех трёх корней фазовая кривая превращается в полукубическую параболу

$$(y')^2 = 2y^3$$

и мы получаем полюсное решение $u = 2/(x + \delta)^2$ (в выбранной галилеевской системе отсчета имеем $c = 0$, то есть, решение стационарно). Перечисленные решения покрывают все возможные типы фазовых кривых в нашей задаче.

Итак, для солитона амплитуда, скорость и длина волны (в данном случае так естественно назвать характерный размер, на котором решение заметно отличается от нуля) оказываются связанными: они выражаются через единственный параметр a . Решения с такими свойствами существуют для многих нелинейных уравнений, при этом форма солитона и зависимость от параметров могут быть, конечно, другими.

1.3 Про лошадь

Солитоны наблюдаются во многих физических явлениях. Впервые на них обратил внимание Джон Скотт Расселл в 1834 г.. Наблюдавшиеся им волны на воде в канале имели вид горба с характерными размерами: ширина 30 ф., высота 1.5 ф.. Расселл назвал свою волну уединённой волной переноса (solitary wave of translation). Позже, исследованием уединённых волн занимались Эйри, Стокс, Буссинеск, Рэлей и другие британские учёные.

Хотя точная форма волны была Расселлу неизвестна, он установил эмпирическую формулу связи её скорости V и амплитуды A , в канале глубины h :

$$V^2 = g(h + A).$$

Отметим, что это не совпадает с соотношением для солитона (1.5). Дело в том, что волны на воде описываются различными уравнениями, в зависимости от физических условий и рассматриваемых режимов. Многие из этих уравнений также имеют солитонные решения, к ним, в частности, относится уравнение Буссинеска (1871 г.)

$$u_{tt} = (u_{xx} - 3u^2)_{xx}. \quad (1.6)$$

Для него солитон имеет вид

$$u = -\frac{2a^2}{\cosh^2(ax \pm 2a^2t + \delta)}. \quad (1.7)$$

В отличие от солитона КдФ, он может распространяться в любом направлении, в зависимости от выбора знака, а его амплитуда пропорциональна квадрату скорости.

Само уравнение КдФ было получено позже, в 1895 г.. Как и уравнение Буссинеска, оно выводится из уравнений гидродинамики при следующих предположениях: мелкая вода (глубины h); отсутствие вязкости; длинные волны малой амплитуды ($kh = \mu \ll 1$, где k волновое число и $u/h = \epsilon \ll 1$, причём $kh = O(\epsilon)$). Мы не будем повторять этот вывод, а вместо этого покажем, как уравнения (1.2) и (1.6) возникают в другой задаче.

1.4 Численные эксперименты

Решения в виде бегущей волны являются весьма частными. Конечно, мы хотели бы научиться находить решение с заданными начальными и краевыми условиями. Однако, это не так просто. В этом отношении, для уравнения КдФ долгое время ничего не было известно. Лишь в середине XX в. были проведены некоторые численные эксперименты, приведшие к пониманию того, как эволюционирует достаточно общее начальное условие и происходит взаимодействие солитонов. В 1953 г. Ферми, Паста, Улам и Тсингоу предприняли численное исследование системы

$$\frac{m}{k}u_{n,tt} = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} + a(u_{n+1} - u_n)^2 - a(u_n - u_{n-1})^2, \quad (1.8)$$

описывающей одномерную цепочку шариков массы m на пружинках с нелинейной силой упругости $F = k\Delta l(1 + a\Delta l)$. Их целью было подтвердить гипотезу Дебая

1914 г., о том, что конечная теплопроводность твердых тел связана с ангармоничностью кристаллической решётки. В качестве начального условия была принята синусоидальная волна. Предполагалось, что нелинейность взаимодействия приведёт к быстрой перекачке энергии в младшие моды, в соответствии с теоремой о равномерном распределении энергии. Однако, численный эксперимент показал, что возбуждаются лишь несколько низших мод, причём наблюдается явление возвращения системы в исходное состояние. Возможности первого в мире компьютера MANIAC-I, на котором проводился этот *первый в математической физике компьютерный эксперимент* (см. историю в [16, 17]), позволяли рассматривать периодические граничные условия $u_n = u_{n+N}$ при $N = 64$. Это число достаточно велико, и квазипериодичность по t нельзя объяснить возвращением по Пуанкаре.

Качественное объяснение явления возвращения было дано Забуски и Краскалом в 1965 г., также на основе численного счёта (именно в этой работе появилось слово «солитон»). Они рассматривали не саму цепочку (1.8), а уравнение КдФ, которое возникает в непрерывном пределе. В свою очередь, уравнение КдФ заменялось, при численном исследовании, разностной схемой

$$u_n^{j+1} = u_n^{j-1} - \frac{k}{3h}(u_{n+1}^j + u_n^j + u_{n-1}^j)(u_{n+1}^j - u_{n-1}^j) - \frac{\delta^2 k}{h^3}(u_{n+2}^j - 2u_{n+1}^j + 2u_{n-1}^j - u_{n-2}^j) \quad (1.9)$$

с условием периодичности $u_n^j = u_{n+2N}^j$.

Опишем предельный переход от цепочки (1.8) к уравнению КдФ. Положим $u_n(t) = u(x, \tau)$, $x = nh$, $\tau = \omega ht$, тогда разложение $u_{n\pm 1}$ в ряд Тейлора имеет вид

$$u_{n\pm 1} = u \pm hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} \pm \frac{h^3}{6}u_{xxx} + \frac{h^4}{24}u_{xxxx} + o(h^5), \quad h \rightarrow 0,$$

и подстановка в (1.8) приводит к приближённому уравнению типа Буссинеска

$$u_{\tau\tau} = u_{xx} + 2ah u_x u_{xx} + \frac{h^2}{12}u_{xxxx} + o(h^3),$$

описывающие распространение волн в обоих направлениях. Далее, будем считать, что параметр a также мал, $a = \kappa h$, тогда замена $u(x, \tau) = v(X, T)$, $X = x + \tau$, $T = \kappa h^2 \tau$, $24\kappa = \delta^{-1}$ приводит к уравнению КдФ для V_X :

$$V_{XT} = V_X V_{XX} + \delta V_{XXX} + o(h).$$

Вернёмся к описанию результатов Забуски и Краскала. Численный счёт показал, что решение представляется в виде суперпозиции нескольких уединённых волн различной амплитуды и, соответственно, скорости. В силу периодических граничных условий возникает движение по окружности с различными угловыми скоростями, что и даёт квазипериодическую картину. Но, как такое может быть? Ведь уравнение нелинейно и его решения нельзя просто складывать. Естественно ожидать, что бегущие волны разрушатся при прохождении друг через друга. Оказывается, в рассматриваемой модели этого не происходит, и взаимодействие солитонов *упруго*:

оно сводится к сдвигам фаз, а скорости и амплитуды не меняются. В одной из следующих лекций мы докажем это свойство для уравнения КдФ уже не численно, а аналитически.

Следует отметить, что локализованные решения допускают многие нелинейные уравнения. Более того, многие уравнения обладают решениями, описывающими упругое взаимодействие *двух* уединённых волн. Однако, лишь исключительные уравнения обладают решениями, описывающими суперпозицию трёх и более солитонов, не разрушающихся при взаимодействии.

Упругое взаимодействие солитонов (или иных локализованных решений) это одно из ключевых свойств, отделяющих интегрируемые уравнения от неинтегрируемых.

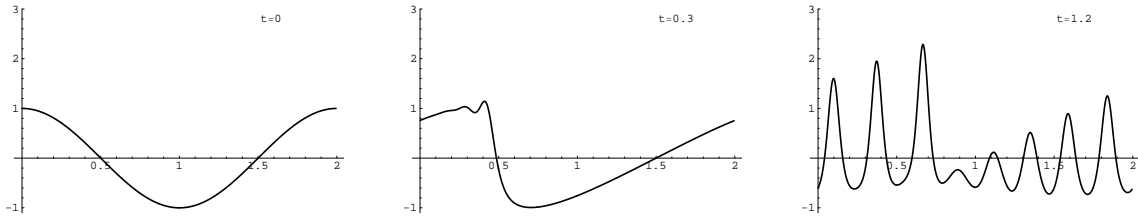


Рис. 5. Эволюция синусоидальной волны.

На самом деле, решения, наблюдаемые в обоих вычислительных экспериментах, и для цепочки (1.8), и для разностной схемы (1.9), с течением времени всё же разрушаются. Это вызвано тем, что сами по себе эти системы не интегрируемы и демонстрируют, строго говоря, лишь солитоноподобное поведение, при достаточно малом шаге решётки. Однако, качественно картина выглядит вполне удовлетворительно и приводит к правильным выводам.

Упомянем ещё пару цепочек. Модель Конторовой–Френкеля, введённая в 1938 г., в теории дислокаций в кристаллической решётке, имеет вид

$$u_{n,tt} = \gamma(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) - \sin u_n.$$

Как и в случае цепочки (1.8), её решения демонстрируют почти-упругое взаимодействие. В отличие от них, солитоны цепочки Тоды (1967)

$$u_{n,tt} = \exp(u_{n+1} - u_n) - \exp(u_n - u_{n-1}) \quad (1.10)$$

действительно взаимодействуют упруго, это интегрируемое уравнение.

Ещё одна оговорка, которую следует сделать, связана с периодичностью по n , которая закладывалась в экспериментах. Для КдФ это означает, что на самом деле рассматриваются не быстроубывающие солитонные решения, а периодические по x . Однако, это не очень существенно. Выше мы видели, что при определённом подборе параметров периодическую бегущую волну можно представлять как решётку из далеко разнесённых солитонов. Два таких решения взаимодействуют практически так же, как и изолированные солитоны. Более общие периодические решения мы будем разбирать на одной из следующих лекций.

1.5 Задачи. Графики и численный счёт

Эллиптические функции Якоби · Исследование закона дисперсии · Солитоны уравнений Бюргера и Буссинеска · Счёт по схеме Забуски–Краскала · Распад ступеньки

Замечания о задачах. Для получения зачета достаточно набрать N баллов¹ по всем домашним заданиям курса. Некоторые задачи удобно решать при помощи компьютера, но это не является обязательным. Приветствуется использование (или неиспользование) любых языков и программ, лишь бы решение было полным и понятным. В тексте, в качестве примера, используется язык *Mathematica*, который позволяет с одинаковой лёгкостью проводить и численный счёт, и символьные вычисления. Его синтаксис обсуждается лишь по мере необходимости, но некоторые упражнения (без баллов) приведены с решениями. Детали языка легко уточнить по руководству [3] и встроенной справке (клавиша [F1] вызывает справку по имени команды под курсором). Ряд полезных примеров и задач, близких к нашему курсу, можно найти в книге [4].

Задача 1.1. Проверить прямым вычислением, что формула (1.5) действительно определяет решение уравнения КдФ (1.2), построить график.

Решение. Для первого знакомства с *Mathematica*, создадим новый файл (notebook) и наберём, в одной ячейке:

```
u= -2a^2 Sech[a x+4a^3t]^2
D[u, t]-D[u, x, x, x]+6u D[u, x]
Simplify[%]
Plot[u/.{a->1, t->0}, {x, -3, 3}]
```

Здесь D это обычная частная производная. Знак умножения $*$ можно заменять пробелом. Ячейка запускается на выполнение нажатием клавиш [Shift+Enter]. Следующие ячейки этого же файла могут содержать другие, независимые вычисления, но следует помнить, что фигурирующие здесь переменные u, x, t, a считаются глобальными, то есть, их значения не ограничиваются одной ячейкой.

Задача 1.2. (1 балл) Эллиптические функции Якоби определяются следующей системой ОДУ, зависящей от параметра k , $0 \leq k \leq 1$:

$$(\operatorname{sn} x)' = \operatorname{dn} x \operatorname{cn} x, \quad (\operatorname{cn} x)' = -\operatorname{dn} x \operatorname{sn} x, \quad (\operatorname{dn} x)' = k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x,$$

с начальными условиями $\operatorname{sn} 0 = 0$, $\operatorname{cn} 0 = 1$, $\operatorname{dn} 0 = 1$. Вывести соотношения

$$\operatorname{sn}^2 x + \operatorname{cn}^2 x = 1, \quad k^2 \operatorname{sn}^2 x + \operatorname{dn}^2 x = 1$$

и показать, что формула $y = y_2 - \alpha \operatorname{cn}^2(\beta x)$ даёт решение уравнения

$$(y')^2 = 2(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)$$

(с точностью до линейной замены, оно совпадает с уравнением для эллиптической функции Вейерштрасса $\wp'(x)^2 = 4\wp(x)^3 - g_2\wp(x) - g_3$). Найти связь параметров с нулями y_j и вывести формулу (1.3).

¹Число N будет определено позже...

Задача 1.3. (1 балл) Исследовать закон дисперсии для уравнения Буссинеска

$$\sigma u_{tt} = (u_{xx} - 3u^2)_{xx}, \quad \sigma = \pm 1.$$

Показать, что в случае $\sigma = 1$ формула (1.7) даёт все быстроубывающие решения в виде бегущей волны, а в случае $\sigma = -1$ таких решений не существует. (Замечание: константы интегрирования, возникающие при понижении порядка, удобно фиксировать, используя условие убывания).

Задача 1.4. (2 балла) Рассмотреть бегущие волны для модифицированного уравнения КдФ (мКдФ $^\pm$)

$$u_t = u_{xxx} \pm 6u^2u_x,$$

и проанализировать различные типы сепаратрисных решений. В частности, доказать следующие утверждения.

1) В случае мКдФ $^+$ все быстроубывающие решения в виде бегущей волны имеют вид

$$u = a \operatorname{sech}(ax + a^3t + d),$$

а в случае мКдФ $^-$ таких решений не существует.

2) В отличие от уравнения КдФ, сдвиг $u \rightarrow u + \text{const}$ не компенсируется преобразованием Галилея, поэтому имеет смысл рассматривать и солитоны с ненулевой асимптотикой. Показать, что такие решения имеются при любом знаке нелинейного члена.

3) Для мКдФ $^-$ имеется решение

$$u = \pm a \tanh(ax - 2a^3t + d),$$

с разной асимптотикой при $x \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow +\infty$. Решения такого типа называются *кинками*.

Задача 1.5. (2 балла) Нелинейное уравнение Шрёдингера (НШ $^\pm$)

$$iu_t = u_{xx} \pm 2|u|^2u,$$

где $u = p + iq$, эквивалентно системе из двух уравнений для вещественных функций $p(x, t)$, $q(x, t)$. Как и в двух предыдущих примерах, знак имеет значение. Проверить подстановкой перечисленные ниже решения, построить графики для p , q , $|u|$.

Решение постоянной амплитуды (Бозе-конденсат, в одной из физических интерпретаций НШ):

$$u = be^{i(ax + (a^2 \mp 2b^2)t + c)},$$

солитон огибающей (для НШ $^+$):

$$u = \frac{ae^{i(bx + (b^2 - a^2)t + c)}}{\cosh(a(x + 2bt) + d)};$$

солитон Перегринна (для НШ $^+$):

$$u = e^{2it} \left(1 - \frac{4(1 + 4it)}{1 + 4x^2 + 16t^2} \right).$$

Задача 1.6. (1 балл) Проверить прямым вычислением, что функция

$$u_n(t) = \frac{(1 + a^{n+1}f)(1 + a^{n-2}f)}{(1 + a^n f)(1 + a^{n-1}f)}, \quad f = c \exp((a - a^{-1})t)$$

удовлетворяет цепочке Вольтерра

$$u_{n,t} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}),$$

построить график (для построения профиля можно использовать функцию `ListPlot`, для 3-мерной картинки — `ParametricPlot3D`).

Задача 1.7. Вывести формулу $u(x, t) = f(x + u(x, t)t)$ для решения уравнения Хопфа $u_t = uu_x$ (1.1). Построить профили решения для разных моментов t .

Решение. Напомним метод характеристик для квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка

$$a_1 u_{x_1} + a_2 u_{x_2} + \dots + a_n u_{x_n} = b,$$

где a_j, b функции от (x_1, \dots, x_n, u) . Выписывается ассоциированная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{b}.$$

Если у нее удастся найти n функционально независимых первых интегралов, то есть, функций $C_j(x_1, \dots, x_n, u)$ таких, что $dC_j = 0$, $j = 1, \dots, n$, то общее решение записывается в неявном виде

$$F(C_1, \dots, C_n) = 0,$$

где F произвольная функция от n переменных. В нашем примере имеем

$$\frac{dt}{1} = -\frac{dx}{u} = \frac{du}{0} \Rightarrow u = C_1, \quad C_1 dt + dx = 0 \Rightarrow C_2 = C_1 t + x$$

и общее решение имеет вид $F(u, x + ut) = 0$, что эквивалентно $u = f(x + ut)$.

В *Mathematica* график можно построить при помощи функции `ParametricPlot`. Сначала задаём начальный профиль $u(x, 0) = f(x)$ и отрезок $[a, b]$. Далее, определяем функцию `g[t]`, которая строит, для заданного момента t , совместный график начального условия и решения в параметрическом представлении $x(s, t) = s - f(s)t$, $u(s, t) = f(s)$. Функция `Manipulate` позволяет менять значение t интерактивно, при помощи специальной панели с ползунком (эта функция доступна начиная с 6-й версии *Mathematica*).

```
f[x_] := 4Sin[x]+Cos[2x]+Cos[3x]
a=-1;
b=12.5;
g[t_] := ParametricPlot[{{s, f[s]}, {s-f[s]t, f[s]}}, {s, a, b},
  PlotStyle->{Blue, Black},
  PlotRange->{{a, b}, Automatic},
  AspectRatio->Automatic]
Manipulate[g[t], {{t, 0}, -1, 1, Appearance -> "Labeled"}]
```

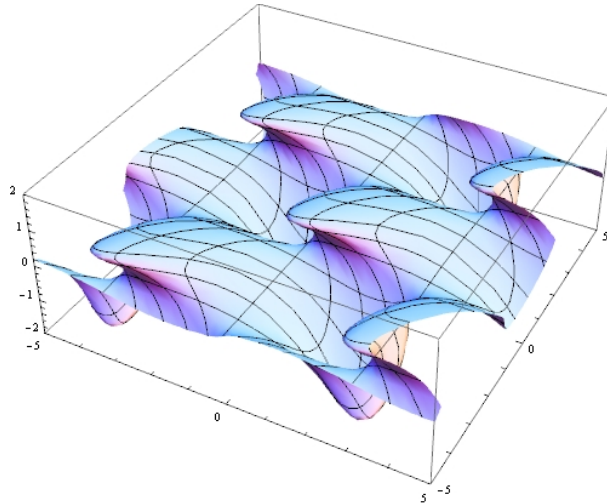


Рис. 6. Решение 2D уравнение Хопфа.

Задача 1.8. (1 балл) Решить аналогично уравнение $u_t = uu_x + u^2u_y$, $u(x, y, 0) = f(x, y)$. Выбрать начальное значение $f = \sin x \cos y$ или самостоятельно, построить графики решения для разных моментов t (см. рис 6).

Задача 1.9. (4 балла) Воспроизвести результаты численного эксперимента Забуски–Краскала для разностной схемы (1.9), построить графики решения для разных моментов времени (как на рис. 5). В статье [15] в качестве начального условия было принято

$$u_n^0 = u_n^1 = \cos \frac{\pi n}{N}, \quad n = 0, \dots, 2N - 1, \quad (1.11)$$

и рассматривалось значение $\delta = 0.022$. Пространственный шаг решетки равен $h = 1/N$, но значения N и k (шаг по времени) не указаны. Их следует подобрать так, чтобы решение выглядело достаточно гладким, а схема была устойчивой. Поэкспериментируйте и с другими начальными данными или значениями δ . Изменение δ равносильно масштабированию начального условия; зависит ли число солитонов в решении от этого параметра?